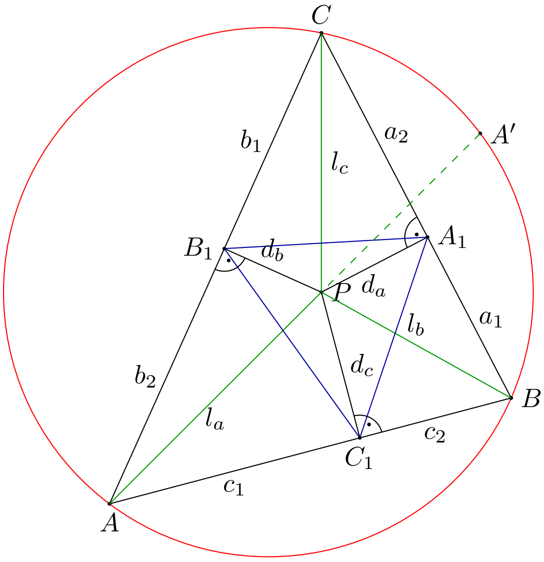
O pewnej nierówności geometrycznej

Justyna ŚCIBISZ, Rzeszów*

Matematycy zarejestrowali i nazwali kilkaset punktów szczególnych trójkąta i co najmniej tyle charakterystycznych prostych i odcinków. Tu chciałam zająć się sytuacją, gdy pewien punkt trójkąta jest rzutowany prostokątnie na jego boki.



Przyjmijmy oznaczenia z rysunku obok oraz standardowe oznaczenia a, b, c i α, β, γ. Ponadto oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na tym trójkącie i przez O (niewidoczny na rysunku) jego środek. Trójkąt $A_1B_1C_1$ nazywamy trójkątem rzutów punktu P; jego pole oznaczamy przez S_P, a pole całego trójkąta przez S. Odległość P od O oznaczymy przez d. Ponadto punkt A' to drugie przecięcie okręgu opisanego na ABC z prostą AP.

Między odcinkami w tej konfiguracji zachodzą przeróżne zależności, łatwe do uzyskania bardzo elementarnymi sposobami (jak np. twierdzenie Pitagorasa). Mamy więc

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

a długość odcinka A_1B_1 to

$$\frac{c \cdot l_c}{2R} = \sqrt{d_a^2 + d_b^2 + 2d_ad_b\cos\gamma} = l_c \sin\gamma$$

i wiele innych powszechnie znanych zależności.

Mniej znana jest zależność $\dfrac{d^2}{R^2} = 1 - \dfrac{4S_p}{S}$.

Aby się o tym przekonać, warto zwrócić uwagę na równość $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle A'BP$.

Jest tak dlatego (rys. 1), że (proszę prześledzić rachunki)

$\sphericalangle APB = 360^\circ - \sphericalangle APB_1 - \sphericalangle B_1PA_1 = \sphericalangle BPA_1 = 360^\circ - \sphericalangle APB_1 - (180^\circ - \sphericalangle ACB) - \sphericalangle BPA_1 =$
$= 180^\circ - \sphericalangle AC_1B_1 + \sphericalangle AA'B - \sphericalangle BC_1B_1 = 180^\circ + \sphericalangle AA'B - (180^\circ - \sphericalangle A_1C_1B_1) =$
$= \sphericalangle AA'B + \sphericalangle A_1C_1B_1$, czyli $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle APB - \sphericalangle AA'B = \sphericalangle A'BP$.

Wobec twierdzenia sinusów mamy

$$A_1C_1 = BP\sin\gamma,\ \ B_1C_1 = AP\sin\beta,\ \ A'P\sin\alpha = BP\sin\sphericalangle A'BP.$$

Zatem $S_P = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1C_1 \sin\sphericalangle A_1C_1B_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1C_1 \sin\sphericalangle A'BP =$
$= \frac{1}{2}AP \cdot BP \sin\gamma \sin\beta \sin\sphericalangle A'BP = \frac{1}{2}AP \cdot A'P \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{2}AP \cdot A'P\frac{S}{2R^2} =$
$= \dfrac{S}{4R^2}(R^2 - d^2)$,
co daje zapowiedzianą równość.

Przedostatnia równość bierze się z mniej powszechnie znanego wzoru na powierzchnię trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R:

$$2R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

a ostatnia z potęgi punktu względem okręgu.

Zapowiedziana w tytule nierówność jest następująca:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2}{b^2} + \frac{c_1^2 + c_2^2}{c^2} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{d^2}{R^2}.$$

Dla celów dowodowych przedstawimy ją w nieco bardziej skomplikowanej postaci

$$(\star)\qquad \frac{l_b^2 + l_c^2 - 2d_a^2}{a^2} + \frac{l_c^2 + l_a^2 - 2d_b^2}{b^2} + \frac{l_a^2 + l_b^2 - 2d_c^2}{c^2} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{d^2}{R^2}.$$

Znany mi dowód jest potwornie rachunkowy i przebiega w trzech krokach.

Krok I

$$\frac{l_b^2 + l_c^2}{a^2} + \frac{l_c^2 + l_a^2}{b^2} + \frac{l_a^2 + l_b^2}{c^2} =$$
$$= \frac{l_b^2}{a^2} + \frac{l_c^2}{a^2} + \frac{l_c^2}{b^2} + \frac{l_a^2}{b^2} + \frac{l_a^2}{c^2} + \frac{l_b^2}{c^2} = (d_b^2 + d_c^2 + 2d_bd_c\cos A)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\sin^2 A} +$$
$$+ (d_a^2 + d_c^2 + 2d_ad_c\cos B)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\sin^2 B} + (d_a^2 + d_b^2 + 2d_ad_b\cos C)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{1}{\sin^2 C} =$$
$$= (d_b^2 + d_c^2 + 2d_bd_c\cos A)\frac{b^2 + c^2}{b^2c^2\sin^2 A} + (d_a^2 + d_c^2 + 2d_ad_c\cos B)\frac{a^2 + c^2}{a^2c^2\sin^2 B} +$$
$$+ (d_a^2 + d_b^2 + 2d_ad_b\cos C)\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2\sin^2 C} = \frac{1}{4S^2}\left[(b^2 + c^2)(d_b^2 + d_c^2 + 2d_bd_c\cos A) + \right.$$

*Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej Politechniki Rzeszowskiej, justyna9895@gmail.com

$$+(a^2+c^2)(d_a^2+d_c^2+2d_a d_c\cos B)+ +(a^2+b^2)(d_a^2+d_b^2+2d_a d_b\cos C)\Big] =$$

$$= \frac{1}{4S^2}\left[(b^2+c^2)(d_b^2+d_c^2)+(a^2+c^2)(d_a^2+d_c^2)+(a^2+b^2)(d_a^2+d_b^2)\right]+$$

$$+\frac{1}{2S^2}\left[(b^2+c^2)d_b d_c\cos A+(a^2+c^2)d_a d_c\cos B+(a^2+b^2)d_a d_b\cos C\right]=$$

$$=\frac{1}{4S^2}\left[(b^2+c^2)d_b^2+(b^2+c^2)d_c^2+(a^2+c^2)d_a^2+(a^2+c^2)d_c^2+(a^2+b^2)d_a^2+(a^2+b^2)d_b^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4S^2}\left[\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)d_b d_c}{bc}+\frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)d_a d_c}{ac}+\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)d_a d_b}{ab}\right]=$$

$$=\frac{1}{4S^2}\left[(2a^2+b^2+c^2)d_a^2+(a^2+2b^2+c^2)d_b^2+(a^2+b^2+2c^2)d_c^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4S^2}\left[\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)d_2 d_c}{bc}+\frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)d_a d_c}{ac}+\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)d_a d_b}{ab}\right].$$

Odcinki d_a, d_b, d_c są wysokościami w trzech trójkątach APB, BPC, CPA, stąd

$$2S = ad_a + bd_b + cd_c.$$

Ponadto $2S = bc\sin\alpha = ca\sin\beta = ab\sin\gamma$, co pozwala wyznaczyć sinusy α, β, γ jako, odpowiednio, $\frac{2S}{bc}$, $\frac{2S}{ca}$, $\frac{2S}{ab}$. W konsekwencji pola trójkątów A_1PB_1, B_1PC_1, C_1PA_1 są odpowiednio równe $\frac{2S}{bc}d_b d_c$, $\frac{2S}{ca}d_c d_a$, $\frac{2S}{ab}d_a d_b$, co daje $\frac{S_P}{S} = \frac{d_b d_c}{bc} + \frac{d_b d_c}{bc} + \frac{d_b d_c}{bc}$.

Te zależności wraz ze wzorem Herona pozwalają wykonać

Krok II

$$\frac{l_b^2+l_c^2-2d_a^2}{a^2}+\frac{l_c^2+l_a^2-2d_b^2}{b^2}+\frac{l_a^2+l_b^2-2d_c^2}{c^2}+4\frac{S_P}{S}-\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{l_b^2+l_c^2-2d_a^2}{a^2}+\frac{l_c^2+l_a^2-2d_b^2}{b^2}+\frac{l_a^2+l_b^2-2d_c^2}{c^2}+4\Big[\frac{d_b d_c}{bc}+\frac{d_b d_c}{bc}+\frac{d_b d_c}{bc}\Big]-\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{l_b^2+l_c^2}{a^2}+\frac{l_a^2+l_c^2}{b^2}+\frac{l_a^2+l_2^2}{c^2}-2\left[\frac{d_a^2}{a^2}+\frac{d_b^2}{b^2}+\frac{d_c^2}{c^2}\right]+4\left[\frac{d_b d_c}{bc}+\frac{d_a d_c}{ac}+\frac{d_a d_b}{ab}\right]-\frac{5(ad_a+bd_b+cd_c)^2}{8S^2}=$$

$$=\frac{1}{4S^2}\left[(2a^2+b^2+c^2)d_a^2+(a^2+2b^2+c^2)d_b^2+(a^2+b^2+2c^2)d_c^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4S^2}\left[\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)d_b d_c}{bc}+\frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)d_a d_c}{ac}+\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)d_a d_b}{ab}\right]+$$

$$-2\left[\frac{d_a^2}{a^2}+\frac{d_b^2}{b^2}+\frac{d_c^2}{c^2}\right]+4\left[\frac{d_b d_c}{bc}+\frac{d_a d_c}{ac}+\frac{d_a d_b}{ab}\right]+$$

$$-\frac{5}{8S^2}[a^2d_a^2+b^2d_b^2+c^2d_c^2+2(bcd_b d_c+acd_a d_c+abd_a d_b)]=\frac{1}{4S^2}\Big[(2a^2+b^2+c^2-\frac{8S^2}{a^2}-\frac{5a^2}{2})d_a^2+$$

$$+(a^2+2b^2+c^2-\frac{8S^2}{b^2}-\frac{5b^2}{2})d_b^2+(a^2+b^2+2c^2-\frac{8S^2}{c^2}-\frac{5c^2}{2})d_c^2\Big]+$$

$$+\frac{1}{4S^2}\left[\left(\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{bc}+\frac{16S^2}{bc}-5bc\right)d_b d_c+\left(\frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)}{ac}+\frac{16S^2}{ac}-5ac\right)d_a d_c+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{ab}+\frac{16S^2}{ab}-5ab)\right)d_a d_b\right]=$$

$$=\frac{1}{4S^2}\left[\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}-\frac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{2a^2}\right)d_a^2+\right.$$

$$+\left(a^2+c^2-\frac{b^2}{2}-\frac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{2b^2}\right)d_b^2+$$

$$\left.+\left(a^2+b^2-\frac{c^2}{2}-\frac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{2c^2}\right)d_c^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4S^2}\left[\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)-3b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}{bc}d_b d_c+\right.$$

$$+\frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)-3c^2a^2+2b^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{ac}d_a d_c+$$

$$\left.+\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)-3a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}{ab}d_a d_b\right]=$$

$$=\frac{1}{4S^2}\left[\frac{b^4+c^4-2b^2c^2}{2a^2}d_a^2+\frac{a^4+c^4-2a^2c^2}{2b^2}d_b^2+\frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{2c^2}d_c^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4S^2}\left[\frac{a^2b^2-b^2c^2+a^2c^2-a^4}{bc}d_b d_c+\frac{a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2-b^4}{ac}d_a d_c+\frac{a^2c^2-a^2b^2+b^2c^2-c^4}{ab}d_a d_b\right]=$$

$$=\frac{1}{8S^2}\left[\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2}d_a^2+\frac{(c^2-a^2)^2}{b^2}d_b^2+\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}d_c^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4S^2}\left[\frac{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{bc}d_b d_c+\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{ac}d_a d_c+\frac{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}{ab}d_a d_b\right]=$$

$$=\frac{1}{8S^2}\left[\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2}d_a^2+\frac{(c^2-a^2)^2}{b^2}d_b^2+\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}d_c^2+\frac{2(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{bc}d_b d_c+\right.$$

$+\frac{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{ac}d_a d_c + \frac{2(c^2-a^2)(b^2-c^2)}{ab}d_a d_b\Big] =$

$$= \frac{1}{8S^2}\left[d_a\frac{b^2-c^2}{a} + d_b\frac{c^2-a^2}{b} + d_c\frac{a^2-b^2}{c}\right]^2.$$

Krok III

polega już tylko na wstawieniu do otrzymanego wzoru pierwszej uzyskanej zależności

$$\frac{l_b^2+l_c^2-2d_a^2}{a^2}+\frac{l_c^2+l_a^2-2d_b^2}{b^2}+\frac{l_a^2+l_b^2-2d_c^2}{c^2}+1-\frac{d^2}{R^2}-\frac{5}{2}= \\ =\frac{1}{8S^2}\left[d_a\frac{b^2-c^2}{a} + d_b\frac{c^2-a^2}{b} + d_c\frac{a^2-b^2}{c}\right]^2,$$

czyli

$$\frac{l_b^2+l_c^2-2d_a^2}{a^2}+\frac{l_c^2+l_a^2-2d_b^2}{b^2}+\frac{l_a^2+l_b^2-2d_c^2}{c^2}= \\ =\frac{3}{2}+\frac{d^2}{R^2}+\frac{1}{8S^2}\left[d_a\frac{b^2-c^2}{a} + d_b\frac{c^2-a^2}{b} + d_c\frac{a^2-b^2}{c}\right]^2,$$

co kończy dowód nierówności ($\star$), gdyż ostatni składnik prawej strony jest nieujemny.

A teraz równość

Problem, kiedy w otrzymanej nierówności jest równość, sprowadza się do pytania, kiedy

$$(*)\qquad d_a\frac{b^2-c^2}{a} + d_b\frac{c^2-a^2}{b} + d_c\frac{a^2-b^2}{c} = 0.$$

Aby odpowiedzieć na nie sensownie, należy spojrzeć na rozpatrywaną sytuację ogólniej.

Punkt, którego rzuty na boki trójkąta rozpatrujemy, nie musi leżeć we wnętrzu tego trójkąta, ale wówczas przez boki musimy rozumieć proste zawierające wierzchołki. Nasze rachunki przebiegną poprawnie, gdy zdecydujemy się liczbom d_a, d_b, d_c dodać znaki: liczba będzie dodatnia, gdy punkt, rzutowany na bok przechodzący przez dwa wierzchołki, będzie leżał po tej samej stronie owego boku, co trzeci wierzchołek, i będzie ujemna w przeciwnym przypadku. Podobnie będzie z polami trójkątów: ustalimy (dowolnie) jeden z obrotów płaszczyzny i będziemy pole trójkąta traktowali jako dodatnie przy kolejności wierzchołków zgodnej z tym obrotem, i jako ujemne w przeciwnym przypadku.

Gdy rzutowany punkt będzie leżał na okręgu opisanym na trójkącie ABC, wówczas punkty A', B', C' będą współliniowe – prosta, na której będą leżały, to prosta Simsona.

W 1828 roku Julius Plücker spostrzegł, że tak uogólnione liczby d_a, d_b, d_c mogą być potraktowane jako współrzędne punktu P. Zauważył też, że liczby te są dane z dokładnośćią do proporcjonalności, dlatego będziemy je tu zapisywali jako $[d_a : d_b : d_c]$. Obecnie mówi się, że są to *współrzędne trójliniowe*.

Tu z ich własności będzie dla nas istotny tylko fakt, że proste we współrzednych trójliniowych mają równanie liniowe ([5]).

Rozpatrzmy więc prostą o równaniu

$$x_1\frac{b^2-c^2}{a} + x_2\frac{c^2-a^2}{b} + x_3\frac{a^2-b^2}{c} = 0.$$

Z ($*$) wynika, że – gdy w dowiedzionej nierówności jest równość – leży na niej punkt P. Pozostaje pytanie, co to za prosta.

Ponieważ współrzędne trojliniowe środka okręgu opisanego na trójkącie ABC to

$[\cos\alpha : \cos\beta \cos\gamma] = [\frac{b^2+c^2-a^2}{bc} : \frac{b^2+c^2-a^2}{bc} : \frac{b^2+c^2-a^2}{bc}],$

więc na tej prostej leży również ten środek:

$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\cdot\frac{b^2-c^2}{a} + \frac{a^2+c^2-b^2}{ac}\cdot\frac{c^2-a^2}{b} + \frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\cdot\frac{a^2-b^2}{c} =$
$= \frac{a^4+b^4+c^4-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2}{abc} = 0.$

Symedianą nazywamy prostą symetryczną do środkowej trójkąta względem dwusiecznej kąta wychodzącej z tego samego wierzchołka

Okazuje się, że na tej prostej leży także punkt Lemoine'a, czyli punkt przecięcia symedian trójkąta ABC, bo – jak można sprawdzić ([1], [3]) – jego współrzędne trójliniowe to $[a:b:c]$.

$$a\frac{b^2-c^2}{a}+b\frac{c^2-a^2}{b}+c\frac{a^2-b^2}{c}=b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2=0.$$

A zatem w dowodzonej nierówności jest równość, gdy rozpatrywany punkt leży na prostej przechodzącej przez środek okręgu opisanego na trójkacie ABC i przez jego punkt Lemoine'a.

Literatura

[1] Bednarczuk, J.: *Izogonalne sprzężenie i symediany*, Delta, maj 2016
[2] Jaszuńska, J.: *Potęga punktu*, Delta, luty 2012
[3] Johnson, R.A.: *Advanced Euclidean Geometry (Modern Geometry)*, Dover Publications, New York 1960
[4] Kieza, M.: *O prostej Simsona raz jeszcze*, Delta, wrzesień 2011
[5] Kordos, M.: *Tak samo, ale zupełnie inaczej*, Delta, marzec 2018
[6] Liu, J.: *A geometric inequality with applications*, Journal of Mathematical Inequalities, Vol. 10, No. 3 (2016), 641-648
[7] Weisstein, E.W.: *CRC Concise Encyklopedia of Mathematics*, Chapman&Hall/CRC, USA 2003
[8] Zetel, S.: *Geometria trójkąta*, PZWS, Warszawa 1964