Równania hydrodynamiki. Model a rzeczywistość

Grzegorz ŁUKASZEWICZ, Warszawa*

Admittedly, as useful a matter as the motion of fluid and related sciences has always been an object of thought. Yet until this day neither our knowledge of pure mathematics nor our command of the mathematical principles of nature have a successful treatment.

Daniel Bernoulli (1700–1782)

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LVI Szkole Matematyki Poglądowej, *Matematyzacja*, Wola Ducka, sierpień 2017.

Redakcja

Spis treści.

1. Model a rzeczywistość, hydrodynamika a hydraulika.

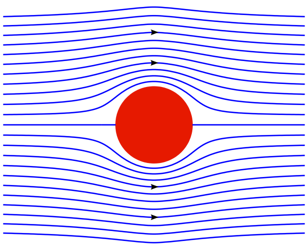
Napisano kiedyś złośliwie, że *hydrodynamika* wyjaśnia zjawiska, które nie mogą być obserwowane, natomiast *hydraulika* obserwuje zjawiska, które nie mogą być wyjaśnione.

Ktoś inny zauważył, że studiując klasyczny traktat sir Horaca Lamba pt. *Hydrodynamics*, nie dowiemy się, że woda jest mokra.

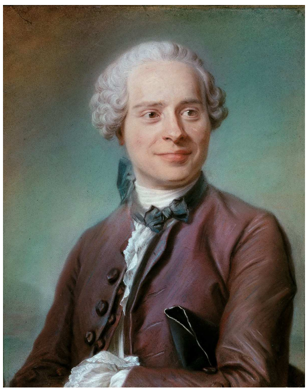
Niestety, obie oceny zawierają dużo prawdy, a dowodem tego jest trwający od początku nowożytnej historii badań ruchu cieczy i gazów rozdźwięk w środowisku uczonych.

Uściślijmy, że przez hydrodynamikę rozumiemy tu teoretyczną dziedzinę wiedzy należącą do matematyki i zajmującą się badaniem różnych modeli płynów, a przez hydraulikę – bardziej praktyczne badania, związane z konkretnymi zastosowaniami inżynierskimi.

Leonard Euler (1707–1783)



Rys.1



Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783)

2. Paradoksy równań Eulera. Przykład.

Rozważmy potencjalny, nieściśliwy, nielepki i stacjonarny opływ cylindra kołowego, opisany równaniami Eulera, naszkicowany na rysunku 1,

$$
\begin{aligned}
(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p,\\
\operatorname{div}\vec{u} &= 0,\\
\vec{u}\cdot\vec{n} &= 0 \ \text{ na } \ S,\\
\vec{u}(\infty) &= \vec{a} = (a,0,0),
\end{aligned}
$$

gdzie S jest brzegiem opływanego ciała, $a > 0$.

Mamy tu dwa paradoksy (niezależnie od symetrii ciała):

- Paradoks odwracalności.
- Paradoks d'Alemberta (1752).

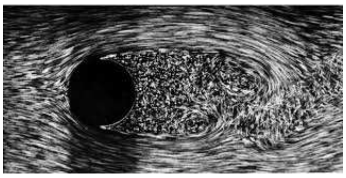
Paradoks odwracalności mówi, że jeśli $(\vec{u}, p)$ jest rozwiązaniem powyższego zagadnienia, z warunkiem w nieskończoności $\vec{a}$, to również $(-\vec{u}, p)$ jest rozwiązaniem, z warunkiem w nieskończoności $-\vec{a}$.

Paradoks d'Alemberta mówi, w szczególności, że opływany przedmiot nie stawia oporu.

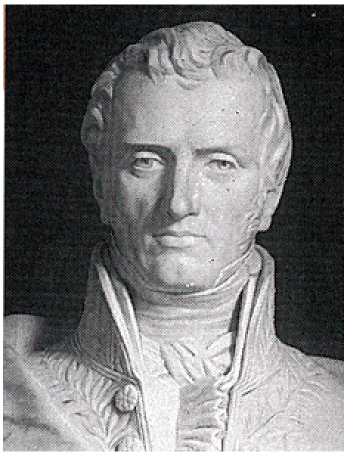
Konsekwencją równań Eulera jest także zachowanie energii kinetycznej przepływów, tzn. że nie jest ona dyssypowana w czasie ruchu przez tarcie o ścianki obszaru przepływu i tarcie wewnętrzne w płynie, tak jak to jest w każdym płynie lepkim.

A zatem, skoro model Eulera produkuje absurdalne konsekwencje, takie jak np. powyższe dwa paradoksy, to warto poszukać modelu bardziej przystającego do faktów, w szczególności uwzględniającego lepkość płynu.

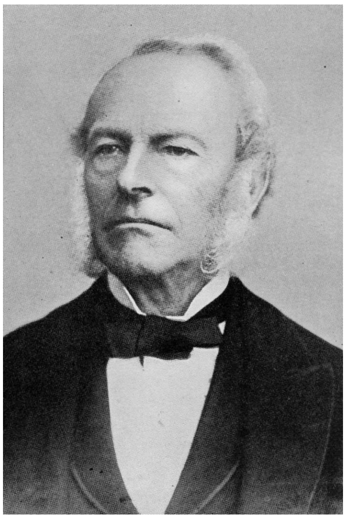
*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki UW, G.Lukaszewicz@mimuw.edu.pl



Rys.2
Płyn przykleja się do ścianki cylindra, może się też oderwać.



Claude-Louis Navier (1785–1836)



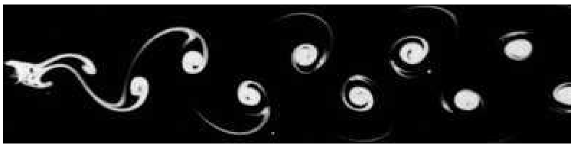
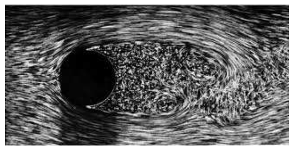
George Stokes (1819–1903)

Augustin–Louis Cauchy (1789–1857)

3. Równania Naviera–Stokesa – efekt lepkości.

Rozważmy nieściśliwy, lepki i stacjonarny opływ cylindra kołowego. Na rysunku 2 pokazany jest efekt lepkości: płyn przykleja się do ścianki, ale też może się od niej oderwać, jeśli prędkość opływu jest dostatecznie duża.

Na poniższych zdjęciach widać dwa możliwe scenariusze, odpowiadające różnym prędkościom opływu.

Drobna zmiana prędkości może spowodować radykalną zmianę obrazu.

Widzimy, że następujące sensowne założenia nie są spełnione:

- Symetryczne przyczyny produkują symetryczne skutki.
- Małe zaburzenia produkują małe skutki.
- Topologia przepływu może być odgadnięta.

Przepływ za opływanym obiektem jest turbulentny. Naturalne są pytania:

- Jak można go opisać? Jakimi narządziami?
- Jak można go zmierzyć?

Pomimo bardzo chaotycznego zachowania się płynu ... „w tym szaleństwie jest metoda”. Mamy teorię układów dynamicznych, atraktory, miary niezmiennicze, rozwiązania statystyczne, itd. Pojęcia te, związane z równaniami Naviera–Stokesa, pozwalają opisać i zrozumieć pewne aspekty przepływów turbulentnych płynów o stałej gęstości. Jest to zdumiewające, jeśli się popatrzy na założenia użyte do wyprowadzenia tych równań.

Wygląda na to, że równania te są „mądrzejsze od nas”, zawierają w sobie treści, których nikt się nie spodziewał. Zaiste, tkwi w tym pewna magia, tajemnica.

Poniżej przyjrzymy się bliżej równaniom hydrodynamiki klasycznej, pytaniom o ich interpretację, i kilku hipotezom dotyczącym ich roli w opisie burzliwych (turbulentnych) przepływów płynów nieściśliwych (np. takich jak woda).

Równania hydrodynamiki wyrażają prawa zachowania. W obszarze przepływu wyróżnijmy pewien element płynu poruszający się wraz z płynem. Niech w chwili t zajmuje on obszar $\Omega(t)$ o brzegu $\partial\Omega(t)$. Przez $\vec{u}(\mathbf{x},t)$ i $\rho(\mathbf{x},t)$ oznaczmy wektor prędkości i gęstość płynu (w punkcie $\mathbf{x}$ i w chwili t), a przez $\vec{f}(\mathbf{x},t)$ gęstość sił masowych działających na płyn (np. siły grawitacji).

Prawo zachowania pędu

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \rho\vec{u}\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega(t)} \rho\vec{f}\,d\mathbf{x} + \int\limits_{\partial\Omega(t)} \vec{t}_n\,dS$$

mówi, że zmiana pędu poruszającego się wraz z płynem dowolnego elementu płynu jest równa sumie sił działających na ten element. Po prawej stronie mamy siły masowe, działające na element oraz siły powierzchniowe związane z oddziaływaniem elementu płynu z sąsiednimi elementami.

Cauchy postulował, że siły powierzchniowe w danym punkcie brzegu zależą tylko od orientacji brzegu (danej przez wektor normalny $\vec{n}$ w danym punkcie), skąd wynika, że $\vec{t}_n = \vec{t}_n(\mathbf{x},t,\vec{n}) = \vec{n}\cdot T(\mathbf{x},t)$), gdzie T jest pewną macierzą (zwaną tensorem naprężeń), a zatem całkę powierzchniową możemy zamienić, korzystając ze wzoru Greena, na całkę po obszarze i dostajemy

$$(1)\qquad \int\limits_{\Omega(t)} \rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right)d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega(t)} \rho\vec{f}\,d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega(t)} \mathrm{div}\,T\,d\mathbf{x}.$$

Powyżej korzystaliśmy z równania transportu (Reynoldsa)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} F(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega(t)} \{\frac{\partial F(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathrm{d}iv\,(F(\mathbf{x},t)\vec{u}(\mathbf{x},t))\}d\mathbf{x}$$

oraz z prawa zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{d}iv\,\rho\vec{u} = 0, \tag{2}$$

prostej konsekwencji równania transportu i dowolności obszaru całkowania $\Omega(t)$. Wykorzystując dowolność obszaru całkowania w (1), wnioskujemy, że w rozważanym obszarze przepływu spełnione są równania

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right) = \rho\vec{f} + \mathrm{d}iv\,T.$$

Cała fizyka modelu ukryta jest w założeniu Cauchy'ego i, w konsekwencji, w tensorze naprężeń, dla którego, przy pewnych fundamentalnych ograniczeniach dotyczących formułowania praw fizyki, mamy dużą swobodę wyboru. Pozwala to wyprodukować rozmaite modele hydrodynamiczne. W klasycznej hydrodynamice w rezultacie ustaleń (obserwacyjnych i fenomenologicznych), trwających dobrych kilka dziesięcioleci, wypracowano następującą postać

$$T_{ij} = (-p + \lambda\mathrm{d}iv\,\vec{u})\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{3}$$

gdzie funkcja skalarna p oznacza ciśnienie, a λ i μ są lepkościami płynu.

Równania Naviera–Stokesa wyrażają prawa zachowania pędu i masy, odpowiednio, dla płynu *lepkiego* i *o stałej gęstości*, otrzymane z równań (1), (2) i (3),

$$\frac{\partial \vec{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + (\vec{u}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\vec{u}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{\rho}\nabla p(\mathbf{x},t) + \nu\triangle\vec{u}(\mathbf{x},t) + \vec{f}(\mathbf{x},t), \tag{4}$$

$$\mathrm{d}iv\,\vec{u}(\mathbf{x},t) = 0, \tag{5}$$

gdzie $\nu = \frac{\mu}{\rho} > 0$ jest tzw. kinematyczną lepkością płynu. W przypadku granicznym, gdy $\nu = 0$, równania Naviera–Stokesa redukują się do równań Eulera płynu *nielepkiego* o stałej gęstści.

Równania Eulera wciąż są ważnym narzędziem mechaniki płynów, zarówno w zastosowaniach, jak i w teorii; patrz np. ref. G.Birkhoff, paragraf 18.

Mając powyższy układ równań, chcemy zbadać, czy ma on rozwiązania w rozważanym obszarze czasoprzestrzennym $G \times (0,T)$, przy założeniu, że np. znane jest pole wektorowe prędkości w danej chwili początkowej $t = 0$ i na brzegu obszaru, np.

$$\vec{u}(\mathbf{x},0) = \vec{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in G, \qquad \vec{u}(\mathbf{x},t) = \vec{u}_B(\mathbf{x},t), \quad (\mathbf{x},t)\in\partial G\times(0,T),$$

gdzie $\vec{u}_0$ oraz $\vec{u}_B$ są dane. Układ równań z danymi warunkami w chwili początkowej i na brzegu obszaru stanowi tzw. *zagadnienie początkowo–brzegowe.*

4. Model a rzeczywistość. Związki. Podstawowe pytania, hipotezy.

Zakładamy tu, że model jest zawarty w równaniach Naviera–Stokesa, ich rozwiązaniach i własnościach tych ostatnich przy zadanych warunkach brzegowych i początkowych. Musimy odpowiedzieć na ważne pytania.

- Co rozumiemy przez rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego dla równania Naviera–Stokesa?
- Jakie warunki brzegowe są (matematycznie/fizycznie) uzasadnione?
- Czy interesujące z punktu widzenia fizyki rozwiązania istnieją? Czy są jednoznaczne? Czy istnieją na każdym przedziale czasu $(0,T)$?
- Czy znając odpowiednie rozwiązania, możemy się dowiedzieć czegoś nowego o rzeczywistym zachowaniu się płynu? Czego powinniśmy się dowiedzieć, a czego raczej nie?
- Jaki jest zakres zastosowań modelu?

Powyższe pytania stanowią motywację do badań w zakresie matematycznej teorii równań Naviera–Stokesa od samego początku ich powstania. Sporo zrobiono, ale teoria jest daleka od zamknięcia, i to zarówno ta jej część, która dotyczy samej matematyki, jak i ta, która dotyczy ich związków z fizyką, hydrauliką i innymi konkretnymi zastosowaniami.

Nie jest znany jeszcze zakres zastosowań modelu Naviera–Stokesa. Jest sporo wyników cząstkowych potwierdzających jego użyteczność, ale też model ten prowadzi czasami do paradoksów. W związku z tym powstają i badane są rozmaite jego modyfikacje.

Poniżej kilka ważnych hipotez dotyczących opisu ważnego *zjawiska turbulencji*, dotyczącego bardzo ważnej szerokiej klasy rzeczywistych przepływów. Hipotezy te wciąż stanowią silną motywację do badań równań Naviera–Stokesa.

I am an old man now, and when I die and go to heaven, there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics and the other is the turbulent motion of fluids. About the former, I am really rather optimistic.
Sir Horace Lamb (1932)

H1. Istnieje *uniwersalna teoria* turbulencji opisująca cały zakres zjawisk dotyczących turbulencji.

H2. *Równania Naviera–Stokesa* opisują przepływy turbulentne.

H3. *Osobliwości rozwiązań* równań Naviera-Stokesa tłumaczą turbulencję.

H4. Turbulencję można opisać w ramach teorii *chaosu deterministycznego*.

H5. Przepływy turbulentne można opisać za pomocą *skończonej liczby* parametrów.

5. Przykłady rozwiązań równań Naviera–Stokesa i Eulera.

Jeżeli rozważane zagadnienie zawiera w sobie *symetrie* (dotyczące obszaru przepływu, działających sił, warunków brzegowych) i jeśli od rozwiązań także wymagamy pewnych symetrii, to możemy często łatwo wskazać takie rozwiązania. Znajdziemy rozwiązania układu równań (4)–(5) dla $\nu > 0$ i dla $\nu = 0$ dla „tego samego” zagadnienia i porównamy je do siebie i ... do naszych fizycznych intuicji.

Rozważmy przepływ między dwiema poziomymi płaszczyznami, odległymi o h. W kartezjańskim układzie współrzędnych obszarem przepływu jest zbiór $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3, 0 \leqslant z \leqslant h\}$. Załóżmy, że wszystkie dane wraz z rozwiązaniem nie zależą od współrzędnej y. Wtedy przepływ jest *dwuwymiarowy*. Załóżmy dalej, że na płyn nie działają siły masowe (np. można zaniedbać siłę grawitacji), że przepływ jest niezależny od czasu, tzn. jest *stacjonarny*, oraz że jest skierowany tylko wzdłuż osi Ox. W końcu załóżmy, że na brzegu obszaru przepływu prędkość płynu jest równa zeru, tzn. płyn przykleja się do ścianki.

Oznaczmy, $\vec{u}(\mathbf{x}) = (u(x, z), 0)$, $p(\mathbf{x}) = p(x, z)$. Układ równań Naviera–Stokesa redukuje się wtedy do prostszego układu

$$u(x,z)\frac{\partial u}{\partial x}(x,z) - \nu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,z)\Big) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,z)}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,z)}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Z przedostatniego równania wnioskujemy, że p nie zależy od współrzędnej z, tzn. $p = p(x)$, a z ostatniego równania wnioskujemy, że u nie zależy od współrzędnej x, tzn. $u = u(z)$. Pozwala to uprościć pierwsze równanie do równania różniczkowego *zwyczajnego*

$$-\nu\frac{d^2 u}{dz^2}(z) + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}(x) = 0, \tag{9}$$

z którego wynika, że $\frac{dp(x)}{dx} = G$ dla pewnej stałej G. Załóżmy, że $G < 0$, wtedy ciśnienie maleje liniowo wraz ze wzrostem x i płyn powinien poruszać się w tę stronę pod wpływem różnicy ciśnień. Rzeczywiście, rozwiązując równanie

$$-\nu\frac{d^2 u}{dz^2}(z) + \frac{1}{\rho}G = 0, \tag{10}$$

z warunkami brzegowymi $u(z) = 0$ dla $z = 0, z = h$, otrzymujemy

$$u(z) = \frac{G}{2\nu\rho} z(z - h), \quad 0 \leqslant z \leqslant h. \tag{11}$$

Ze względu na dowolność stałej całkowania G widać, że tak postawiony przez nas problem nie ma jednoznacznego rozwiązania. Dopiero dookreślenie zagadnienia, np. wskazanie siły wymuszającej ruch płynu poprzez wybór stałej G, czyni rozwiązanie jednoznacznym. Ze wzoru (11) widać też, że wraz z maleniem lepkości do zera parabola, będąca wykresem profilu prędkości, wydłuża się, a maksymalna prędkość (dla $z = h/2$) rośnie nieograniczenie, podczas gdy na brzegu obszaru (dla $z = 0, z = 1$) prędkość płynu pozostaje zerowa. Rozwiązanie nie stoi w sprzeczności z naszym wyczuciem roli lepkości, choć w naturze nikt chyba takiego rozwiązania nie spotkał. Intuicja podpowiada, że przy dużych prędkościach (lub małych lepkościach) płyn zachowuje się w sposób burzliwy, przy wcale nieoczywistym zachowaniu przy ściankach. Możemy np. wyobrazić sobie zjawisko zerwania kontaktu z brzegiem (kontaktu wyrażonego założeniem $u = 0$ dla dla $z = 0, z = 1$). Istotnie, rzeczywistość jest znacznie bogatsza od naszych modeli matematycznych.

Z drugiej strony widać, że antycypacja rozwiązania dla przepływu *nielepkiego* przez podstawienie coraz mniejszych lepkości w rozwiązaniu (11) prowadzi do absurdu. Fizyka podpowiada, że skoro przepływ jest nielepki, to płyn nie przykleja się do materialnej ścianki będącej brzegiem obszaru, ale się po niej *ślizga*, tzn. że prawidłowy warunek brzegowy na brzegu obszaru powinien być $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, gdzie $\vec{n}$ jest wektorem prostopadłym do brzegu, w naszym przypadku warunek ten jest spełniony jako część założenia.

Podstawmy zatem $\nu = 0$ w układzie (6)–(8), w poszukiwaniu rozwiązania naszego zagadnienia dla układu równań Eulera. Otrzymamy ...

W tym miejscu zachęcam Czytelnika do samodzielnych poszukiwań i konfrontacji znalezionych rozwiązań z intuicją fizyczną.

Dalsze rozważania o rozwiązaniach równań hydrodynamiki, związane z ich stabilnością, a zatem występowaniem w przyrodzie oraz użytecznością modeli hydrodynamicznych, zasługują na oddzielny artykuł.

Literatura

Tomasz Dłotko: *Teoria stabilności w sensie Lapunowa i globalne atraktory*, Delta, Styczeń 2005.

Grzegorz Łukaszewicz: *Hydrodynamika a hydraulika*, Delta, Sierpień 2017.

Witold Sadowski: *Dowody i obliczenia*, Delta, Styczeń 2017.

Witold Sadowski: *Równania Naviera–Stokesa*, Delta, Grudzień 2014.

Witold Sadowski: *Niezbędna persona non grata*, Delta, Lipiec, 2013.

Garrett Birkhoff: *Hydrodynamics. A Study in Logic, Fact and Similitude*, Princeton University Press, 1960.

Olivier Darrigol: *Worlds of flows. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005.

Olivier Darrigol: *For a Philosophy of Hydrodynamics*, The Oxford Handbook of Philosophy of Physics, Ed. by Robert Batterman, Oxford University Press, 2013.

Peter Davidson: *Turbulence. An Introduction to Scientists and Engineers*, Oxford University Press, 2004.

Norman Riley, Philip Drazin: *The Navier–Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, 2007.

Lew Dawidowicz Landau, Jewgienij M. Lifszyc: *Hydrodynamika*, PWN Warszawa, 2009.

Grzegorz Łukaszewicz, Piotr Kalita: *Navier–Stokes Equations. An Introduction with Applications*, Springer, 2016.

Clifford Truesdell: *Essays in the History of Mechanics*, Springer, 1968.