Brałem udział w pisaniu podstawy programowej

Michał Krych, Warszawa*

Zwrócił się do mnie Marek Kordos z prośbą o napisanie do dnia 1 czerwca opowiadania na temat tworzenia podstawy programowej. Nie wiadomo dlaczego akurat do mnie, ale zgodziłem się zrobić mu taki prezent z okazji Międzynarodowego Dnia Dziecka (widać, że Marek czuje się ciągle młodo).

Wypada jakoś zacząć, więc zacznę od tego, że jestem od dawna przeciwny kolejnym reformom oświaty, a zwłaszcza tym przygotowywanym szybko. Chodzi mi o to głównie, że większość nauczycieli, podobnie jak większość urzędników, hydraulików, woźnych, dziennikarzy itp. to są ludzie, którzy wykonują swój zawód, bo tak im życie się ułożyło. Mają też jakieś rodziny, bywają chorzy itd. Trudno więc spodziewać się, że gdy akurat trzeba będzie zaczynać uczyć według nowych programów, będą mogli poświęcić dostatecznie dużo czasu – znacznie więcej niż zwykle – na to, by się solidnie do tego przygotować. Będą też zaskakiwani w różny sposób.

Jakiś czas temu ($\approx$ 20 lat temu) powiedziałem w czasie wykładu z analizy matematycznej dla studentów drugiego roku matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, że wyznacznik jest funkcją ciągłą współczynników macierzy, bo to suma pewnej liczby iloczynów i z niewiadomych przyczyn zapytałem studentów o liczbę tych iloczynów. Dowiedziałem się, że tych iloczynów jest n. Ta odpowiedź mnie nie ucieszyła, więc studenci zmienili ją na n^n i znów nie zadowolili wykładowcy. Trzeci strzał był już taki, jak trzeba. Był to wynik zmiany sposobu definiowania wyznaczników na pierwszym roku. Niby w dalszym ciągu dowiadują się, że wyznacznik jest sumą $n!$ iloczynów z odpowiednimi znakami, ale teraz jest to jeden z licznych wniosków, a gdy ja się uczyłem, była to podstawowa definicja. Podałem więc jakiś inny dowód i po kłopocie.

Nauczyciele prowadząc lekcje według zreformowanego programu, też będą się w ich trakcie dowiadywać, że zwykle uczniowie coś wiedzieli np. w pierwszej licealnej, ale w wyniku zmiany sposobu uczenia już nie wiedzą, a tylko słyszeli o tym. Trzeba więc poświęcić temacikowi więcej czasu. Po kilku latach nauczyciele już wiedzą, co i jak robić, ale wtedy zaczyna się następna reforma, po której ma już być wspaniale. Efekty tych działań widzę, ucząc studentów pierwszego roku i śmiem twierdzić, że jest coraz gorzej. Systematycznie. Oczywiście, w Polsce wszyscy kochamy tradycje, co w przypadku reform edukacji oznacza, że są one słabo, bo za szybko, przygotowane i – co najważniejsze – nieprzetestowane. Z jakichś tajemniczych powodów nie ma nigdy czasu, by sprawdzić, jak nowy program zadziała. Na to trzeba kilku lat i kilkunastu (lepiej kilkudziesięciu) różnych szkół działających w różnych warunkach. Wiem o tym, że niektórzy autorzy podręczników zbierali, a może nadal zbierają opinie o swych dziełach, by móc je poprawiać. Wiem na pewno o istnieniu takich, bo kiedyś powiedziałem jednemu, że dziecko moje uczy się z jego podręcznika, a nauczycielka po prostu nie rozumie sugestii Autora i ukierunkowuje dzieci zupełnie inaczej. Powiedział mi, że już to wie, że w jego książce jest za dużo pomysłów (to prawie cytat, ale sprzed około 30 lat).

Po tym wstępie jest prawie oczywiste, że nie powinienem uczestniczyć w pracach nad podstawą programową, a jednak zostałem do nich zaproszony i będę ponosić część odpowiedzialności za powstały produkt. Moja decyzja spotkała się tu i ówdzie z wyraźną dezaprobatą. Zgodziłem się na prośbę dr hab. Macieja Borodzika, którego zdarzyło mi się czegoś uczyć i który szukał do współpracy ludzi kompetentnych. Widziałem, że będzie starał się rozmawiać z różnymi ludźmi, a to dobry znak. W zespole znaleźli się wykładowcy z wyższych uczelni, więc osoby mające podstawy do wypowiadania się w sprawie zawartości merytorycznej podstawy programowej, nauczyciele, którzy wiedzą, co można w czasie lekcji zrobić i w jakim czasie oraz młodzi zapaleńcy, którzy z kolei wiedzą, że wszystko da się zrobić i że warto zmieniać i uwspółcześniać programy nauczania. Zgodziłem się wejść do zespołu, zastrzegając, że rozmawiać mogę tylko o matematyce. Zrobiłem to, choć trudniej potem będzie narzekać na efekt, bo przecież zawsze winni są jacyś *oni*. Poza tym miałem i mam nadzieję, że da się zapobiec różnym bardzo niebezpiecznym pomysłom speców od tzw. nowoczesności, może da się przywrócić przynajmniej częściowo właściwą rangę rozumowaniom i dowodom, może uda się przynajmniej spowolnić proces prowadzący do nauki wszystkiego na pamięć przy jednoczesnych okrzykach, że pamiętać nic nie trzeba, bo wszystko gdzieś już jest napisane. Jednocześnie wiedziałem, że w zespole pojawią się osoby, które mają doświadczenie i z którymi będę w stanie dyskutować. Uważałem też, że zmieniać należy możliwie mało. Nie byłem jedyny. Coś trzeba, bo zmienia się organizacja szkół, a te zmiany spowodują też likwidację egzaminu po szóstej klasie, przesunięcie egzaminu po klasie dziewiątej na koniec klasy ósmej. Coś więc komisja musiała poprzestawiać. Dodać muszę, że nie czuję się kompetentny w sprawie szkół podstawowych, bo nigdy w takiej szkole niczego nie uczyłem, a własne dzieci to zupełnie inna sprawa. Jednak uczyłem w pierwszych licealnych i stąd nieco wiem o efektach różnych poczynań w szkołach podstawowych.

Zacznę od rzeczy śmiesznej. Ktoś wymyślił, że koniecznie w podstawówkach musi pojawić się twierdzenie Pitagorasa (lata siedemdziesiąte poprzedniego wieku). Wydedukowano z tego, że trzeba w szkołach podstawowych mówić o liczbach wymiernych i niewymiernych, bo ponoć bez tej wiedzy ich używać nie sposób. Autorom tej śmiałej tezy jakoś nie przeszkadza to, że Archimedes nie miał pojęcia o niewymierności π, a jednak udowodnił kilka wzorów, w których ta liczba występuje, G. W. Leibniz zsumował szereg $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, a zmarł 45 lat przed wydrukowaniem pierwszego dowodu niewymierności tej liczby. Euler zsumował szereg $\sum \frac{1}{n^2}$ w roku 1735, więc 26 lat przed pojawieniem się dowodu niewymierności π. Jakoś mogli się różnymi rzeczami zajmować, uzyskiwać rezultaty, które weszły na trwałe do matematyki, choć nie wiedzieli, że $\pi \notin \mathbb{Q}$. W dalszym ciągu nie wiadomo, czy stała Eulera

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, krych@mimuw.edu.pl

(przyp. $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n)$) jest wymierna, a jest z powodzeniem stosowana w przeróżnych sytuacjach. Nie wie też nikt, czy liczba $\pi + e$ jest wymierna.

Uczono, oczywiście, bez dowodu zgodnie z panującą modą, co zrozumiałe, bo choć dowód podany w 1761 r. przez J. H. Lamberta można napisać zrozumiale z punktu widzenia licealisty (zrobił to M. Laczkovicz), to jednak do szkół podstawowych to rozumowanie nie nadaje się zupełnie.

Nie dowodzono nawet, a przynajmniej nie było nakazu pokazania w czasie lekcji dowodu niewymierności choćby liczby $\sqrt{2}$, bo dowód miał być za trudny do przeprowadzenia w szkole podstawowej. Rezultat „badaliśmy” w drugiej połowie lat siedemdziesiątych w czasie egzaminów wstępnych do XIV LO im. K. Gottwalda w Warszawie (obecnie im. S. Staszica). Pytanie wymyślił ówczesny doktor, Tadeusz Iwaniec: czy liczba 3,14 jest niewymierna? Odpowiedź na ogół była twierdząca, a argument był prosty: $\pi = 3{,}14$, a przecież liczba π jest niewymierna. To byli kandydaci do klas matematycznych, więc osoby deklarujące zainteresowanie matematyką, otrzymujące w swych szkołach oceny bardzo dobre. Usiłowałem doprowadzić do skreślenia z podstawy programowej niewymierności π oraz przesunięcie opowieści o liczbach niewymiernych w takie miejsce, by uczniowie mogli już zrozumieć dowód niewymierności np. liczby $\sqrt{2}$. Moim zdaniem głównym celem opowiadań o liczbach niewymiernych jest pokazanie uczniom dowodu niewymierności. Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ to pierwszy dowód tego, że czegoś nigdy nie zrobimy, bez względu na postęp wiedzy, powstawanie coraz lepszych komputerów itd. Przy okazji: to, czy jakaś liczba jest wymierna, żadnego praktycznego znaczenia nie ma, a też żadnego zrozumiałego dla młodzieży wniosku z niewymierności liczby π nikt mi wskazać nie potrafi. W dodatku większość nauczycieli nigdy dowodu niewymierności tej liczby nie widziała i rozpowszechnia jakieś teorie na temat jego trudności, oczywiście fałszywe.

Oczywiście, na innych przedmiotach też tak się dzieje: kiedyś moje chyba dziewięcioletnie wtedy dziecko przywędrowało z problemem, jak napisać wypracowanie zatytułowane *„Znaczenie Konstytucji Trzeciego Maja”*. Nie umiałem dziecku sensownie pomóc. W podręczniku autorzy napisali, że była czarna procesja, konstytucję uchwalono, było powstanie kościuszkowskie, a na rynku starego miasta są cztery strony, które mają nazwy, mogło jeszcze coś być o Targowicy. To jest takie samo robienie „wody z mózgu” jak opowieści o niewymierności π. Rzecz oczywiście na tym polega, że nikt na podstawie takiego tekstu nie może nic sensownego napisać na zadany temat, wzięty zresztą z podręcznika i trzymający się w nim długo (mam dzieci w różnym wieku). Dziecko jednak czegoś się w szkole nauczyło, bo propozycję, by napisało, że znaczenie tego dokumentu było żadne, bo konstytucja w życie nie weszła, odrzuciło, mówiąc coś w rodzaju: ja przecież tak nie mogę napisać. Jak widać, rezultaty nauczania historii i matematyki są zbliżone.

Tłem jest tu wymóg, moim zdaniem, absolutnie zasadniczy: trzeba mówić w szkołach o rzeczach zrozumiałych. Można podawać twierdzenia bez dowodu, ale tylko wtedy, gdy są one co najmniej bardzo przydatne. Mówienie w sposób niezrozumiały o rzeczach, które kiedyś ktoś uznał za interesujące, jest bez sensu, bowiem dziatwy one nie interesują, zresztą młodzi ludzie nie wiedzą przecież i to zupełnie, po co mieliby się akurat tego nauczyć. W rezultacie służy to jedynie ugruntowaniu u młodzieży poglądu, że szkoła z życiem wspólnego za wiele nie ma.

To nie jest jedyny przykład pojawiania się bezsensownych wymagań w szkole. Nauczyciele domagają się tzw. usuwania niewymierności z mianownika. Argumentują, że napis $\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest ładniejszy od napisu $\frac{1}{\sqrt{2}}$. To rzecz gustu oczywiście. Nie zwalczam tego, choć zupełnie nie wiem, w czym przejawia się piękno napisu $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ i dlaczego jest on ładniejszy od $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Nie zwalczam, bo młodzież przy okazji tego rodzaju zabaw ćwiczy jednak przekształcanie wyrażeń algebraicznych, a ta umiejętność jest przydatna w czasie studiów. Pytałem wielokrotnie studentów, po co usuwają niewymierność z mianownika. Odpowiedź to: tak kazano w szkołach, a argumentem zapamiętanym jest piękno napisu. Oczywiście, szło o coś innego. Dawno temu liczono w pamięci, na kartce. Każdy, kto to robił, pamiętał po pewnym czasie, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, a może nawet $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ i wtedy od razu wiedział, że $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ – łatwiejsze jest dzielenie przez 2 od dzielenia przez 1,4142. Użytkownikom kalkulatorów, komputerów zapisanie w tej „ładniejszej postaci” raczej przeszkadza, bo zmusza do wciskania większej liczby guziczków. Cieszyłbym się, gdyby przestano opowiadać takie głupstewka, ale na to szans pewnie nie ma. Głównie dlatego, że z ogromną trudnością powiedzieć można uczniom: *dopiero za czas jakiś część z was zrozumie, dlaczego należało się nauczyć akurat tego.* Zastępcze argumenty są zdecydowanie szkodliwe, bo ich nieprawdziwość prędzej czy później zauważą uczniowie, więc ich wiara w słowa nauczycieli zmaleje. Należałoby jednak kazać rozkładać na czynniki, wymnażać, bo po prostu pewna wprawa jest potrzebna później, by móc zrozumieć nieco bardziej złożone kwestie.

Dowody na lekcjach matematyki są w szkole konieczne, zapewne od siódmej klasy, a na pewno od ósmej. Chodzi o umiejętność rozumowania. To ma znaczenie nie tylko dla matematyków. Matematyka jest obowiązkowa dla wszystkich, więc te jej elementy, które mają znaczenie również dla polonistów, historyków, sprzedawców zielonego groszku, powinny być traktowane z ogromną powagą. Umiejętność logicznego myślenia jest na pewno ważniejsza od wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli, czy wzoru Herona na pole trójkąta. Ludzie po maturze powinni mieć niezerowe szanse zrozumienia różnych ustaw, przepisów itp. W dobrze napisanych ustawach różne pojęcia są definiowane na wstępie. Jest to absolutnie konieczne, bo często od tych sformułowań zależą wysokości jakichś opłat, nakazy lub zakazy (ciekawe, jak miłośnicy regulowania wszystkiego za pomocą ustaw, rozporządzeń, zarządzeń zdefiniują kobietę i mężczyznę, te słowa występują w konstytucji RP: kim jest hermafrodyta, np. jedna z nieżyjących już rekordzistek świata w biegu na 100 m).[1]

Dowodzenie można zaczynać już dosyć wcześnie, ale w konkretnych sytuacjach. Cechę podzielności przez 2 można spokojnie omawiać wcześnie z uzasadnieniem dostępnym dla dzieci, które od formalnego dowodu w istocie swej niewiele się różni: dziesiątka to pięć par, więc jakakolwiek liczba dziesiątek to też ileś par, zatem ostatecznie trzeba tylko

[1] Zawsze staram się pomagać ludziom, więc proponuję: kobieta to ssak z torebką.

zobaczyć, czy resztka w pary da się ustawić. Można zapewne też zapytać dziecko, czy tak samo (czyli patrząc na cyfrę jedności) można sprawdzać podzielność przez 4 lub przez 3. Może to robić nauczyciel w trakcie lekcji, jeśli ma na to czas i jeśli sam dobrze rozumie, w czym sprawa. Oczywiście, na początku dzieci nie są nijak zainteresowane dowodzeniem, są skłonne wierzyć starszym, ale można i należy zachęcać je przeróżnymi pytaniami do uzasadniania różnych zdań.

Dzieci mogą rozumować w konkretnych sytuacjach. Można rozwiązywać zadania tekstowe bez używania algebry, równań itp. To robiono przez setki lat z dobrym skutkiem. Trzeba jednak pamiętać, że wcale nie chodzi o rozwiązywanie konkretnych zadań, lecz o wnioskowanie. Algebra przyspiesza rozwiązywanie licznych zadań, ale czyni te rozwiązania niezrozumiałymi, przynajmniej dla większości. Przedwczesna algebraizacja prowadzi do rytualnego przekształcania równań, zdecydowanie bez zrozumienia. Nauczyciel czegoś sobie życzy, uczniowie spełniają jego życzenia, potem jest przerwa i następna lekcja, np. polski albo wf, co pozwala spokojnie zapomnieć o niezrozumiałej matematyce. Większości ludzi algebra, której zresztą nie rozumieją, do niczego w życiu nie przydaje się. Powinno się jej uczyć, ale te osoby, którym przyjdzie studiować lub pracować w zawodach wymagających stosowania wzorów. Do klasy szóstej ważniejsze jest rozumowanie, ale nie w sytuacji abstrakcyjnej, lecz w konkretnej i tam nie powinny pojawiać się żadne równania.

Na początku ważniejsze jednak jest opanowanie umiejętności rachowania, rysowania figur geometrycznych, bo bez niej nie może być później mowy o eksperymentach. Nieduże liczby uczniowie powinni dodawać i mnożyć w pamięci między innymi po to, by poznać wielkość liczb w różnych sytuacjach. Odwoływanie się do urządzeń elektronicznych nie ma sensu, bo wtedy mamy do czynienia głównie z gimnastyką paluszków. Tu zresztą uwaga pod adresem fizyków. W zadaniach w podręcznikach do fizyki powinny być brane pod uwagę rzeczywiste sytuacje. Trudno za takie uznać stosowanie wzorów wyprowadzanych przy założeniu $\sin x \approx x$ do kątów w okolicach $\frac{\pi}{4}$, a to jest nagminne w odniesieniu do zadań np. z optyki geometrycznej. Miało to sens dawno temu, gdy wszystko przeliczano ręcznie, więc powoli, bo kalkulatory i komputery „nie istniały". Teraz sytuacja ponoć zmieniła się, więc zadania też trzeba pozmieniać.

W szkole podstawowej uczniowie wedle naszej propozycji nie muszą opanować własności potęg o ujemnych wykładnikach, bo w zasadzie nie ma na to czasu, ale też nie jest to wszystkim w życiu potrzebne. Jest jednak sytuacja szczególna dotycząca potęg liczby 10. Zapisywane są często liczby w postaci $6{,}02 \cdot 10^{23}$, ale też w postaci $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ lub $1{,}67 \cdot 10^{-27}$. Co gorsza, zabawki elektroniczne też potrafią odpowiadać, zapisując liczby w ten sposób. Uczeń używając kalkulatora, niewątpliwie spotka takie napisy. Powinien je rozumieć. Po zaakceptowaniu zapisu dziesiętnego nie jest to trudne i wcale nie oznacza, że trzeba też wiedzieć, czym jest 7^{-3}. Za tym więc optowałem.

Sugerowałem też, że odczytywania „liczb rzymskich" należy uczyć tak, by uczeń był w stanie odczytywać napisy na starych budowlach np. na kościołach. Tu zdecydowanie należy uczyć więcej niż do tej pory, tj. do XII, albo nie uczyć wcale. Znów chodzi o to, że te napisy wszyscy zobaczą, powinni też zrozumieć ich treść.

Myślę, że tematy geometryczne są na tyle standardowe, iż nie warto o nich pisać. Poza tym, że twierdzenie Talesa pojawić się ma dopiero w liceum, co zresztą jest powrotem do tradycji. Jest jednak dosyć tematów ważnych do omówienia w szkole podstawowej, więc to nie powinno budzić zastrzeżeń.

Wiele osób koniecznie chciałoby, aby już w szkole podstawowej pojawiły się funkcje. Abstrakcyjne pojęcie funkcji w szkole jeśli występuje, to jedynie formalnie, a potem i tak rzecz redukuje się do kilku funkcji: liniowa, kwadratowa, wymierna stopnia pierwszego zwana homografią, choć w rzeczywistym przypadku trudno zauważyć jakikolwiek związek tych funkcji z obrazkami, no ewentualnie kosinus, sinus, funkcja wykładnicza i logarytm. Nawet jeśli autor jakiegoś podręcznika definiuje funkcje abstrakcyjnie, pisząc o dziedzinie jako zbiorze argumentów i o zbiorze wartości, to i tak nie będzie przecież pisać, że permutacje są funkcjami itp. Jeśli rzeczywiście komuś potrzebny jest wykres czegoś, to może go narysować uczniom. Zabawy w przesuwanie wykresów tudzież inne tego rodzaju przekształcenia powinny pojawiać się wtedy, gdy stają się potrzebne. Oznacza to, że w szkole pojawić się one powinny przy okazji omawiania równań kwadratowych i funkcji kwadratowej, przy okazji sprowadzania trójmianu kwadratowego do postaci kanonicznej, wcześniej to jedynie sztuka dla sztuki. Inne miejsce to rysowanie wykresów funkcji wymiernych pierwszego stopnia, ale to wszystko ma sens dopiero w liceum, gdy coś z tymi funkcjami uczniowie będą zmuszeni zrobić. W szkole podstawowej pojawi się wstęp do tych zagadnień przy okazji oglądania danych statystycznych i więcej o nich nie ma powodu mówić.

Na fizyce w szkole podstawowej powinny pojawiać się proste doświadczenia, uczniowie powinni poznawać różne prawa rządzące światem, raczej coś mierząc niż rozwiązując równania i rysując wykresy. Większość nie jest jeszcze przygotowana do abstrakcyjnych rozumowań i bardzo niewiele im przyjdzie z rysowania wykresów. Byłoby dobrze, gdyby skojarzyli związek między czasem, prędkością i drogą, a na razie tak nie jest – wielu studentów miewa z tym problemy, co brzmi albo tragicznie, albo jak żart, ale jest, niestety, faktem obserwowanym na uczelniach. Byłoby też dobrze, aby dowiedzieli się, co to jest środek masy, a tak nie jest. Ucząc wiele lat studentów ekonomii, przekonałem się o tym wielokrotnie: próbowałem wspominać o środku masy przy okazji funkcji wypukłych, ale szybko zauważyłem, że im to przeszkadza, bo nie wiedzą, o czym mówię. Jest to bardzo zabawne, bo na lekcjach matematyki mówi się o średniej ważonej, pojęcie to pojawia się w szkole, nawet na maturach. Mam wrażenie, że nikt nie mówi uczniom o tym, że najprostszy i historycznie pierwszy przypadek średniej ważonej to środek ciężkości. Myślę, że to poważny błąd dydaktyczny wynikający przede wszystkim z dbałości o niemieszanie przedmiotów. Jest okazja, by pokazać, że coś pojawia się w różnych sytuacjach, więc z niej nie korzystamy. To oczywiście jest niezależne od reform, dobrej woli reformatorów, bo nigdy nie ma czasu na dogadanie się zespołów pracujących nad różnymi przedmiotami – po prostu osoby decydujące, więc politycy z różnych partii decydują, ile czasu na co jest potrzebne i nie muszą nikogo o nic pytać, bo sami przecież najlepiej wiedzą ...

Uczeń w szkole powinien poznawać definicje, a potem twierdzenia, z których większość powinna być dowodzona przynajmniej w podręcznikach, również wtedy, gdy owe dowody na lekcji nie pojawią się. Podręczniki, zdaniem niektórych autorów, mają służyć wyłącznie przygotowaniu do jakichś sprawdzianów. Moim zdaniem to podejście jest szkodliwe. Podręcznik powinien omawiać jakieś twierdzenia z danej dziedziny, dawać możliwość przeczytania tekstu dostosowanego do możliwości ucznia, nieco dokładniejszego od opowiadania usłyszanego w czasie lekcji. Powinny tam też znajdować się informacje, na które na ogół nie ma czasu w trakcie zajęć, a które są naturalnym dopełnieniem omawianych tematów.

Jeśli chodzi o program liceów, to uważałem i uważam, że należy wyraźnie wymagać, aby uczniowie umieli sprowadzać trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej. Nie muszą pamiętać wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, ale muszą je umieć wyprowadzić. Tym bardziej nie muszą pamiętać wzorów na współrzędne wierzchołka paraboli, ale muszą umieć odczytać te współrzędne z postaci kanonicznej. Moim zdaniem celebrowane w szkołach wzory na pierwiastki równania kwadratowego i współrzędne wierzchołka paraboli powinny być ciekawostkami, a podstawowe znaczenie powinno mieć sprowadzanie do postaci kanonicznej (a nie sama postać kanoniczna).

Ostatnio w szkole były wzory na a^2-b^2, a^3-b^3. To jeden z błędów: powinien być wzór na a^n-b^n, który i tak w niejawnej postaci był, bo podawano wzór na sumę ciągu geometrycznego. Ten pogląd podzielali też inni członkowie zespołu pracującego nad podstawą. Nie rozumiem, po co podawać i omawiać oddzielnie szczególne przypadki. Można nauczyć w tym samym lub krótszym czasie wzoru ogólnego. Wiele osób lepiej go zapamięta. Z tego wzoru można też uzyskiwać formułę na $a^{2n+1}+b^{2n+1}$, bo $a^{2n+1}+b^{2n+1}=a^{2n+1}-(-b)^{2n+1}$, tu wyraźnie mówię o wyprowadzeniu drugiego wzoru z pierwszego, a nie o zapamiętywaniu. Ponieważ niektórzy autorzy informują, że $a^{2n}+b^{2n}$ nie rozkłada się na czynniki, więc w podręcznikach powinno obowiązkowo pojawiać się zadanie *Rozłożyć na czynniki rzeczywiste wielomian* x^4+b^4, być może w towarzystwie zadania *wykazać, że wielomian* x^4+1 *nie rozkłada się na iloczyn wielomianów o współczynnikach całkowitych, a nawet wymiernych.* Te zadania powinny pojawić się w komentarzu do podstawy programowej. Nie wiem, czy w końcu tam się znajdą, bo jacyś wybitni specjaliści wiedzą, że napisany przez komisję tekst *Warunki realizacji* jest za długi. Z mego punktu widzenia mówią głupstwa. Jeśli chcemy wpływać w sensowny sposób na jakość kształcenia, to w szczególności musi być miejsce na rozwinięcie i poparcie przykładami różnych tez.

W szczególności rzeczoznawcy oceniający podręczniki też często nie mogą wymusić na wydawnictwach różnych rzeczy, bo z formalnego punktu widzenia tekst książki jest poprawny, choć czasem jest wręcz szkodliwy. Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki w swej opinii twierdzi, że *Pochodna jest miarą zmiany i tak należy ją wprowadzać (na przykładach praktycznych, ale należy pokazać, jak ta zmiana powstaje, np. prędkość jest zmianą drogi w czasie), a tutaj nie da się uniknąć wprowadzenia przyrostu argumentu, przyrostu wartości funkcji i ich ilorazu.* Nic, tylko poprzeć tę opinię. Jest drobne ale. Oto zadanie 6 z tegorocznej matury na poziomie rozszerzonym: *Funkcja f jest określona wzorem* $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ *dla każdej liczby rzeczywistej* x. *Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie* $P=(1,0)$. Jestem przekonany, że zdecydowana większość członków SNM zacznie od obliczenia pochodnej funkcji f za pomocą wzoru na pochodną ilorazu (uczestniczyłem w zebraniu na temat oceniania matur i wiem, że tak ludzie do tego podchodzą). A tu należy obliczyć $f'(1)$ z definicji pochodnej: $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$. Oczywiście obliczenie pochodnej ze wzoru na pochodną ilorazu jest niby tak samo dobre, ale pokazuje, że nauczyciele wcale nie czują tego, że pochodna mierzy tempo zmian funkcji, że chodzi o przybliżenie danej funkcji za pomocą funkcji liniowej.

SNM ma rację i, być może, po pewnym czasie dojdzie do tego, że istotna część nauczycieli będzie w stanie ten postulat stowarzyszenia realizować, ale na razie tak, niestety, nie jest. Poza tym pochodne m. in. dlatego stały się bardzo popularnym narzędziem do badania funkcji, że daje się je obliczać za pomocą bardzo prostych algorytmów. Gdy je wprowadzono, nie istniała jeszcze definicja granicy. Teraz istnieje, ale w rzeczywistości jest trudna. Zdecydowana większość osób trafiających na studia nie rozumie pojęcia granicy, tym bardziej pojęcia pochodnej. Potrafią ją jednak obliczać. To pozwala (niektórym) na stopniowe zrozumienie pojęcia – widzą w konkretnych sytuacjach, co się dzieje i powoli zaczynają rozumieć. Dzieje się to jednak powoli, bo nabranie właściwych intuicji wcale nie jest łatwe. Naukę oprzeć należy na solidnych podstawach. Powinny nimi być definicje i porządnie sformułowane twierdzenia. Warto też pamiętać, że w klasie funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych pochodna funkcji w punkcie może być zdefiniowana algebraicznie jako operacja liniowa spełniająca warunek na pochodną iloczynu – to nietrudne twierdzenie! I chyba tak na pochodną patrzył G. W. Leibniz, nie znając oczywiście twierdzenia. (Dla funkcji np. 15 razy różniczkowalnych twierdzenie wymaga założenia ciągłości operacji liniowej, ale funkcje różniczkowalne w jakimś punkcie dokładnie 15 razy w szkołach, na politechnikach, na wydziałach ekonomii, chemii, geologii i wielu innych nie występują, bo tam w rzeczywistości wszystkie funkcje są analityczne i tylko czasem nie dotyczy to końca któregoś przedziału.)

Nie można mieć nadziei na rozwinięcie właściwych intuicji pochodnej w szkole u istotnej części uczniów. Tylko jedną z przyczyn, i to nie najważniejszą, jest to, że nie wszyscy nauczyciele panują nad tym pojęciem dostatecznie dobrze. Można natomiast nauczyć ich obliczania, a o to w rzeczywistości chodzi uczelniom. Studenci dopiero później nabiorą właściwych intuicji, często szacując błędy za pomocą pochodnych lub obliczając jakieś wielkości w istocie swej będące pochodnymi.

Jeśli chodzi o zadania optymalizacyjne, to wszystko można sprowadzić do jednego twierdzenia. Chodzi o to, że jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału P i ma pochodną we wszystkich jego punktach wewnętrznych, to funkcja ta jest niemalejąca na przedziale P wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna w każdym wewnętrznym punkcie przedziału P. Twierdzenie to w szkole można udowodnić, ale można też podać je bez dowodu. Przedział P może być domknięty, domknięto–otwarty, otwarto–domknięty lub otwarty, może być nieskończony lub skończony. Wynika stąd od razu, że funkcja f jest stała (więc jednocześnie niemalejąca i nierosnąca) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna w punktach wewnętrznych przedziału P zeruje się. Z ostatnich dwóch twierdzeń można wyprowadzić kolejne: funkcja f jest ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy jest pochodna w punktach wewnętrznych przedziału P i między każdymi dwoma jego punktami znajduje się punkt, w którym pochodna f' jest dodatnia. To wymaga czasu i jeśli go brak, o pochodnych w ogóle mówić nie należy. Te uwagi dotyczą każdego tematu, nie tylko optymalizacji.

W innym miejscu prezes ZG SNM pisze *1. Propozycja zmiany oznaczeń zbiorów liczbowych z obecnie stosowanych N, C, W, IW, R i intuicyjnych dla uczniów (od pierwszych liter nazw zbiorów po polsku) wymaga uzgodnień z wydawnictwami i Centralną Komisją Egzaminacyjną. Na tej płaszczyźnie musi być zgodność. Może także z PTM. W Szkolnej Encyklopedii Matematycznej są jako główne oznaczenia N, Z, Q, R, C z uwagą, że w podręcznikach szkolnych używa się N, C, W, R, Z. Zmiana taka może wywołać niepotrzebne zamieszanie, utrudnić uczenie się matematyki wielu uczniom, często uczniowie i nauczyciele korzystają ze „starych dobrych zbiorów", w których są szkolne oznaczenia. Temat do rozważenia. A jeśli takie zmiany, to również należałoby zmienić tg na tan jako oznaczenie tangensa. Należałoby również zmienić sposób zapisywania przedziałów domkniętych,. . . .*

Tu skomentuję bardzo zdecydowanie i nieuprzejmie. Oznaczanie zbioru liczb niewymiernych to nonsens.[2] Nie wprowadzają takiego oznaczenia autorzy bardzo poważnych książek poświęconych np. liczbom niewymiernym (I. Niven), przestępnym (A. Baker) i dają sobie radę. Tego oznaczenia ani w wersji IW, ani w wersji NW nigdy nie należało wprowadzać. Można i należy pisać $x \notin \mathbb{Q}$. Oznaczenia wprowadzane w polskich szkołach powinny być zgodne ze stosowanymi na świecie. Było inaczej w czasach, w których kontakty zagraniczne były nieliczne i mocno ograniczane przez państwo, w każdym razie po naszej stronie żelaznej kurtyny, ale teraz jest inaczej. Od kilkudziesięciu lat nikt na świecie, z wyjątkiem polskich szkół, nie oznacza inaczej zbioru liczb zespolonych niż literą $\mathbb{C}$. To wyklucza użycie tej litery na oznaczenie zbioru liczb całkowitych.[3] Pozostaje więc w tym przypadku trzymać się oznaczeń N. Bourbaki, czyli zbiór liczb całkowitych oznaczany jest literą $\mathbb{Z}$, co pochodzi od niefrancuskiego słowa *die Zahl*. Dzisiejszemu rządowi i jego zwolennikom na pewno ułatwi pogodzenie się z tym oznaczeniem zdanie *God created the integers, all else is the work of man.* wypowiedziane w wersji *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* przez L. Kroneckera. Wiele razy zwracałem uwagę na ten nonsens, a wydawnictwa bronią się, nauczyciele, którym zwracałem uwagę, twierdzą, że na studiach młodzież się przestawi. A dlaczego ma się przestawiać? Świat zmienił się. Pewne rzeczy się ujednolicają. Zresztą SNM to wie, bo pyta o skrót tan. W Europie tangens był oznaczany skrótem tg. To się zmienia. Powód jest bardzo prosty: w komputerach, kalkulatorach na ogół pojawia się tan, bo tego wymagają największe rynki zbytu, więc za pewien czas będzie już tylko tan. I nie zależy to ani od SNM, ani tym bardziej ode mnie. Z oznaczaniem przedziałów domkniętych jest nieco inaczej: sugerowane przez bourbakistów oznaczenie $[a, b]$ jest dosyć powszechne, ale znaczki $\langle a, b\rangle$ też są używane i nie tylko w polskich szkołach. Zupełnie nie przyjęło się oznaczanie przedziału otwartego symbolem $]a, b[$. W gruncie rzeczy chodzi głównie o to, że kilka osób zdecydowało kiedyś, że będą stosowane oznaczenia wydumane przez polskich dydaktyków, a potem wydawnictwa wściekle broniły się przed zmianami w obawie o straty finansowe lub zmniejszenie zysków.

Dodam, że argumenty o bezsensowności tych działań nie trafiały do adresatów. Jak widać, nie trafiają do p. prezes SNM, ale istnieją argumenty, którymi daje przekonać się wydawnictwa: oznaczenia W nie ma w opublikowanym przez CKE zestawie wzorów i twierdzeń dla maturzystów zatytułowanym „Wybrane wzory matematyczne", więc nie wiadomo, czy są one zgodne z prawem; drugi argument pochodzący z formularza dla rzeczoznawców oceniających podręczniki szkolne to pytanie, *czy uwzględnia aktualny stan wiedzy naukowej, w tym metodycznej?* – otóż oznaczanie zbioru liczb całkowitych jest niezgodne z aktualnym stanem wiedzy naukowej, bo przez $\mathbb{C}$ oznaczany jest wszędzie zbiór liczb zespolonych. Takie argumenty powolutku trafiają do redaktorów w wydawnictwach. Ja rozumiem, że różnym ludziom wydaje się, że mogą decydować o wszystkim zgodnie z własnymi poglądami, przyzwyczajeniami itp. Jednak ta ich wolność powinna być ograniczona do ich własnego mieszkania, a jeśli rzecz ma dotyczyć wszystkich uczniów w Polsce, to jednak trzeba uwzględniać to, co się dzieje na całym świecie, który zmienia się nieco. To trochę przypomina sytuacje z życia. Pomimo pełnej wolności osobistej nie mogę wybierać sobie dowolnie strony jezdni, po której jadę, co, oczywiście, mą wolność ogranicza.

Pod koniec lat sześćdziesiątych XX w. zdecydowano, że trzeba nauczyć licealistów rachunku prawdopodobieństwa, bo wiele decyzji w życiu jest opartych na prawdopodobieństwie zdarzeń w przyszłości. Z tą argumentacją trudno nie godzić się. Rachunek prawdopodobieństwa zawędrował do różnych klas w szkołach. Uczy się go powszechnie. Typowe zadania to np. jakie jest prawdopodobieństwo, że w dwóch rzutach kostką sześcienną otrzymamy w sumie 8 oczek. Albo jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach monetą symetryczną wypadną dwa orły i jedna reszka. Przecież nie o to w tej teorii chodzi.

Od kilku lat pytam studentów pierwszego roku o to, jakie jest prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie 500 000 orłów w milionie rzutów symetryczną monetą. Typowe odpowiedzi to 1 lub około 1 albo $\frac{1}{2}$ lub około $\frac{1}{2}$. To konsekwencja sprawiania wrażenia, że wszystko musi być łatwe i zabaw z prawdopodobieństwem polegających na rozwiązaniu typowych zadań podobnych do zacytowanych wyżej. Zdarzają się studenci odpowiadający, że to $\binom{1\,000\,000}{500\,000} \cdot 2^{-1\,000\,000}$, ale wtedy natychmiast pytam ich o przybliżoną wartość tej liczby. Oczywiście, nie spodziewam się odpowiedzi $\binom{1\,000\,000}{500\,000} \cdot 2^{-1\,000\,000} \approx \frac{1}{\sqrt{500\,000\pi}}$, bo trudno spotkać kogoś, kto w szkole słyszał o wzorze Stirlinga i w dodatku zapamiętał tę formułę. Mamy tu przykład zadania, którego rozwiązanie jest w zasięgu uczniów, przynajmniej większości i przy okazji napisana odpowiedź nie jest zbyt wiele warta, bo i tak „nikt" nie wie, co to za liczba.

[2] *I* to od idiotyzm, *W* od wariactwo.

[3] Widać niektórzy chcą być nazywani cymbałami, więc . . .

Żeby było śmieszniej, można tę liczbę oszacować metodami w zasadzie mieszczącymi się w zakresie szkoły podstawowej. Mamy

$$\frac{\binom{1\,000\,000}{500\,000}}{2^{1\,000\,000}} = \frac{1\,000\,000\cdot 999\,999\cdot 999\,998\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\,000\,000\cdot 999\,998\cdot 999\,996\cdot\ldots\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 1\,000\,000\cdot 999\,998\cdot 999\,996\cdot\ldots\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = \frac{999\,999}{1\,000\,000}\cdot\frac{999\,997}{999\,998}\cdot\frac{999\,995}{999\,996}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} <$$

$$< \sqrt{\frac{1\,000\,000}{1\,000\,001}\cdot\frac{999\,999}{1\,000\,000}\cdot\frac{999\,998}{999\,999}\cdot\frac{999\,997}{999\,998}\cdot\frac{999\,996}{999\,997}\cdot\frac{999\,995}{999\,996}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1\,000\,001}} < \frac{1}{1000}$$

Podobnie

$$\frac{999\,999}{1\,000\,000}\cdot\frac{999\,997}{999\,998}\cdot\frac{999\,995}{999\,996}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} > \sqrt{\frac{999\,999}{1\,000\,000}\cdot\frac{999\,998}{999\,999}\cdot\frac{999\,997}{999\,998}\cdot\frac{999\,996}{999\,997}\cdot\frac{999\,995}{999\,996}\cdot\frac{999\,994}{999\,995}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2000}.$$

Oznacza to, że szukane prawdopodobieństwo jest liczbą z przedziału $\left(\frac{\sqrt{2}}{2000}, \frac{1}{1000}\right) \subset (0{,}0007; 0{,}001)$, więc dosyć krótkiego. Oczywiście, żadne intuicje uczniowskie/nauczycielskie nie są w stanie podpowiedzieć tego wyniku, z wyjątkiem osób operujących wzorem Stirlinga. Czasem jednak trzeba jakiś, niekoniecznie ten, przykład omówić, by dać znać grupie myślących uczniów, że po pierwsze, wzór to nie wszystko, po drugie, że oszacowanie wymaga też jakiejś pracy. Oczywiście, kalkulator w pojęciu większości wszystko obliczy. Jednak, gdy zechcą obliczyć 1 000 000!, a na pewno większość zechce w wyniku szkolnego podejścia do symbolu Newtona, to zapewne ów cud techniki odmówi współpracy, a trochę większy sprzęt, np. komputer wyposażony w program Wolfram Mathematica, może jeszcze współpracować, ale 100 000 000! już mu się może nie spodobać. To ważny komunikat dla tych uczniów, którzy pragną zrozumieć świat choć w pewnym stopniu, a nauczyciel powinien ich zmusić do zaplanowania obliczeń w taki sposób, by jednak doprowadziły do wyniku, a nie do wyświetlenia komunikatu o niewykonalności działań.

W komisji prezentowany był pogląd o konieczności pokazywania uczniom prawdziwych danych statystycznych i wyciągania wniosków z nich. Chodzi o to, by używać prawdziwych liczb. Nie ma powodu do tworzenia sztucznych tabelek. Dane są dostępne w internecie, więc nie ma problemu z ich wykorzystaniem.

$* \sim * \sim * \sim * \sim * \sim * \sim * \sim *$