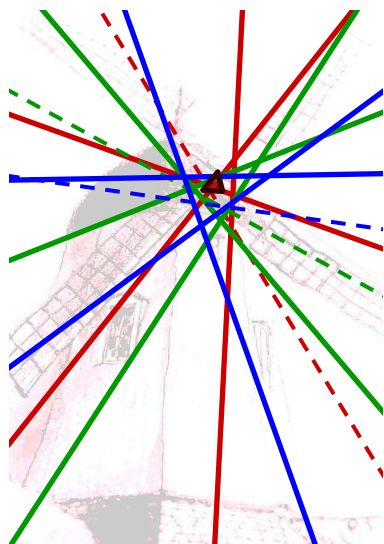


Psychodeliczny wiatrak

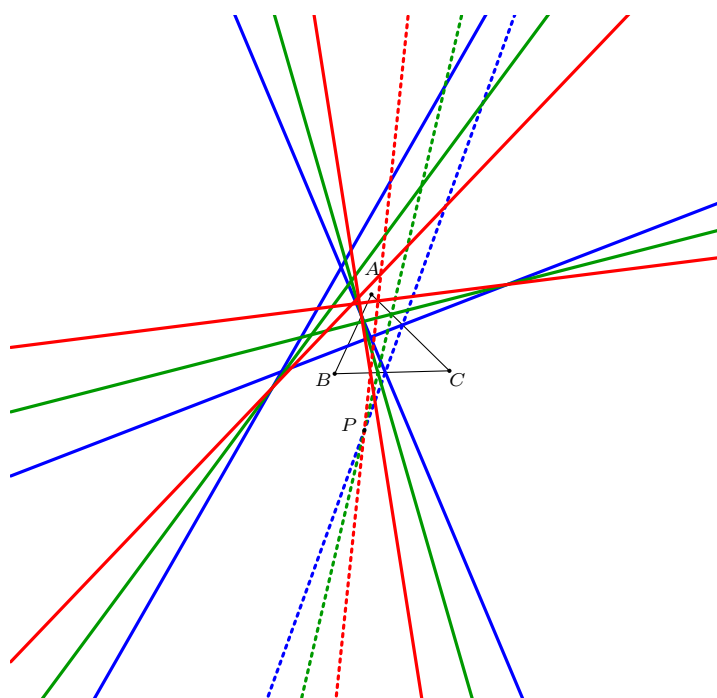
Charles LEYTEM*, Luksemburg
Kamila MURASZKOWSKA**, Warszawa



Psychodeliczny wiatrak narodził się w 2011 roku, jak łatwo się domyślić, w Holandii. Narodził się jako prosta konstrukcja geometryczna, którą ożywiła wyobraźnia. A może to on, wiatrak, tę wyobraźnię ożywił? Dość powiedzieć, że tego ożywiania zebrało się wystarczająco, aby ktoś zechciał napisać o nim bajkę. W tej bajce pokażemy, jak skonstruować wiatrak i wprawić go w ruch. Postaramy się zgłębić geometryczną technologię, która odpowiada za jego pracę. Wreszcie na deser zakręcimy wiatrakiem i popatrzymy, jak gładko zmieli niełatwy na pierwszy rzut oka problem.

Konstrukcja wiatraka

Na potrzeby bajki założmy, że ABC jest ustalonym trójkątem ostrokątnym, wokół którego zbudujemy wiatrak. Ponadto potrzebna nam będzie dowolna prosta ℓ . Aby skonstruować wiatrak, odbijamy prostą ℓ symetrycznie względem boków trójkąta ABC . Proste ℓ_1, ℓ_2 i ℓ_3 , będące wynikiem symetrii ℓ odpowiednio względem prostych BC, CA i AB , przetną się, tworząc trójkąt XYZ , gdzie $X = \ell_2 \cap \ell_3, Y = \ell_3 \cap \ell_1, Z = \ell_1 \cap \ell_2$. Proste ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 będą skrzydłami wiatraka, a trójkąt XYZ – jego piastą. Pozostaje teraz wybrać dowolny punkt P na prostej ℓ , a stanie się ona dźwignią, która wprawi wiatrak w ruch. W miarę jak zacznie się ona obracać wokół punktu P , skrzydła wiatraka zaczną się kręcić, a jego trójkątna piasta ulegnie pewnym regularnym przekształceniom – wiatrak rozpocznie pracę...

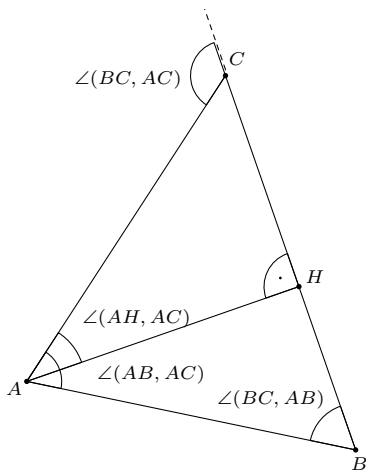


Geometryczna technologia wiatraka

Skupimy się teraz na głębszym poznaniu praw rządzących pracą wiatraka. Zanim przejdziemy do szczegółów jego budowy, ustalimy notację, która będzie przydatnym narzędziem w dalszych rozważaniach.

*charles.leytem@education.lu

**k.muraszkowska@gmail.com



Skrzynka z narzędziami

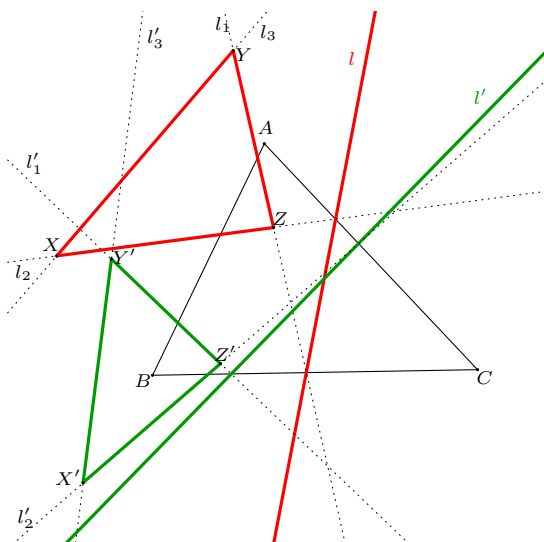
Analizując strukturę wiatraka, będziemy posługiwać się kątami skierowanymi. Mianowicie, dla prostych ℓ i ℓ' , przez $\angle(\ell, \ell')$ oznaczmy kąt, o który należy obrócić prostą ℓ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, aby otrzymać prostą równoległą do ℓ' . Będziemy więc rozpatrywać kąty modulo 180° . Oto kilka prostych własności takiej notacji, które niebawem okażą się przydatne:

- $\angle(\ell, \ell') = \angle(\ell', \ell) = 0^\circ$ wtw., gdy $\ell \parallel \ell'$,
- $\angle(\ell, \ell') + \angle(\ell', \ell) = 0^\circ$,
- w trójkącie ABC : $\angle(BC, AC) = \angle(BC, AB) + \angle(AB, AC)$,
- w trójkącie AHC : $\angle(BC, AC) = \angle(AH, AC) + 90^\circ$, a stąd
$$\angle(AH, AC) = \angle(AH, AC) + 180^\circ = \angle(BC, AC) + 90^\circ,$$
- jeśli proste k' i ℓ' są obrazami odpowiednio prostych k i ℓ w symetrii osiowej, to $\angle(k, \ell) = \angle(\ell', k')$.

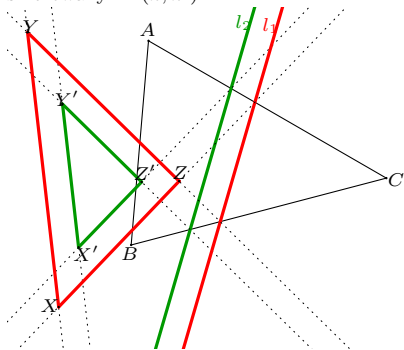
Wyposażeni w ten sposób możemy bez dalszej zwłoki rozpocząć naszą podróż do wnętrza wiatraka.

Cegielka 1. – Podobieństwo piast trójkątnych wiatraka

Każde dwie piasty trójkątne wiatraka XYZ i $X'Y'Z'$, pochodzące odpowiednio od prostych ℓ i ℓ' , są podobne.



Złożenie symetrii osiowych. Dla danych prostych k i k' , przecinających się w punkcie S , złożenie symetrii osiowych najpierw względem prostej k , a następnie względem prostej k' , jest równoważne obrotowi wokół punktu S o kąt skierowany $2\angle(k, k')$.

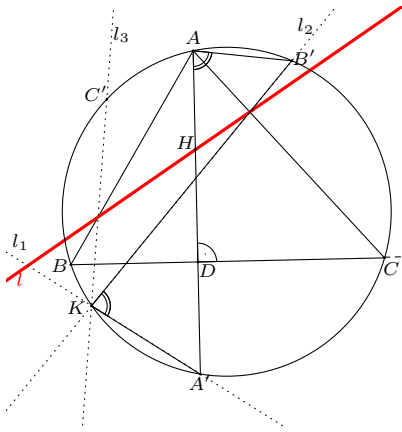


Dowód. Prosta ℓ_2 powstaje z prostej ℓ_1 w wyniku złożenia symetrii kolejno względem prostej BC , a następnie AC . Równoważnie, ℓ_2 jest wynikiem obrotu ℓ_1 wokół punktu C o kąt $2\angle(BC, AC)$, stąd $\angle(\ell_1, \ell_2) = 2\angle(BC, AC)$. Podobnie $\angle(\ell_2, \ell_3) = 2\angle(AC, AB)$ i $\angle(\ell_3, \ell_1) = 2\angle(AB, BC)$. Zatem odpowiednie kąty trójkątów XYZ i $X'Y'Z'$ są równe, a więc trójkąty te są podobne. \square

Cegielka 2. – Wiatraki generowane przez dźwignie równoległe

Jeśli piasty trójkątne XYZ i $X'Y'Z'$ pochodzą od równoległych prostych $\ell \parallel \ell'$, to jeden z tych trójkątów leży wewnątrz drugiego, odpowiednie ich boki są równoległe, a odległości pomiędzy nimi są równe odległości pomiędzy prostymi ℓ i ℓ' .

Dowód. Druga część tezy wynika bezpośrednio z faktu, że symetria zachowuje kąty i odległości. Łatwo także zobaczyć, że jeden trójkąt leży wewnątrz drugiego, jeśli przypomnimy sobie, że pary prostych $(YZ, Y'Z')$ oraz $(ZX, Z'X')$ powstają z pary prostych $(XY, X'Y')$ poprzez odpowiednie obroty. \square



Cegielka 3. – Zdegenerowane piasty trójkątne

Jeśli piasta trójkątna XYZ pochodzi od prostej ℓ przechodzącej przez ortocentrum H trójkąta ABC , to trójkąt XYZ jest zdegenerowany do punktu (tzn. skrzydła wiatraka ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 przecinają się w jednym punkcie).

Dowód. Oznaczmy przez A', B', C' obrazy symetryczne punktu H odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Na mocy znanej własności punkty A', B' i C' leżą na okręgu Γ opisanym na trójkącie ABC . Wykażemy teraz, że punkt przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2 również leży na okręgu Γ . Oznaczmy ten punkt przez K . Wystarczy pokazać, że $\angle(A'A, AB') = \angle(A'K, KB')$. Jak pamiętamy z analizy Cegielki 1.,

$$\angle(A'K, KB') = \angle(\ell_1, \ell_2) = 2\angle(BC, CA).$$

Z drugiej strony, bezpośrednio z własności symetrii wynika, że

$$\angle(A'A, AB') = 2\angle(A'A, AC).$$

Wykonując obliczenia na kątach skierowanych trójkąta ACD , otrzymujemy

$$\angle(A'A, AC) = 90^\circ + \angle(BC, CA).$$

Po połączeniu powyższych mamy

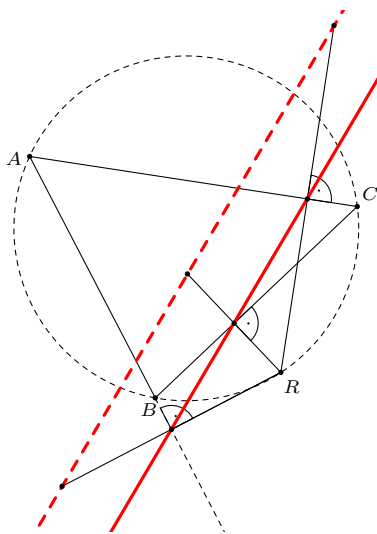
$$\angle(A'A, AB') = 180^\circ + 2\angle(BC, CA) = 2\angle(BC, CA).$$

A zatem punkt K istotnie leży na okręgu Γ . Podobnie dowodzimy, że prosta ℓ_3 przecina się na okręgu Γ zarówno z prostą ℓ_1 , jak i z prostą ℓ_2 . Jedynym miejscem, w którym jest to możliwe, jest więc punkt K . \square

Proste Simsona i Steinera

Jeśli punkt R leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC , to rzuty R na proste AB, BC i CA są współliniowe. Prosta przechodząca przez te rzuty nazywamy prostą Simsona punktu R . Prawdziwa jest także implikacja odwrotna – jeśli rzuty punktu R na proste AB, BC i CA są współliniowe, to R leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Natychmiast wynika stąd, że punkt R leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtw., gdy jego obrazy symetryczne względem prostych AB, BC i CA są współliniowe. Prosta przechodząca przez wspomniane obrazy symetryczne jest równoległa do prostej Simsona i nazywamy ją prostą Steinera.



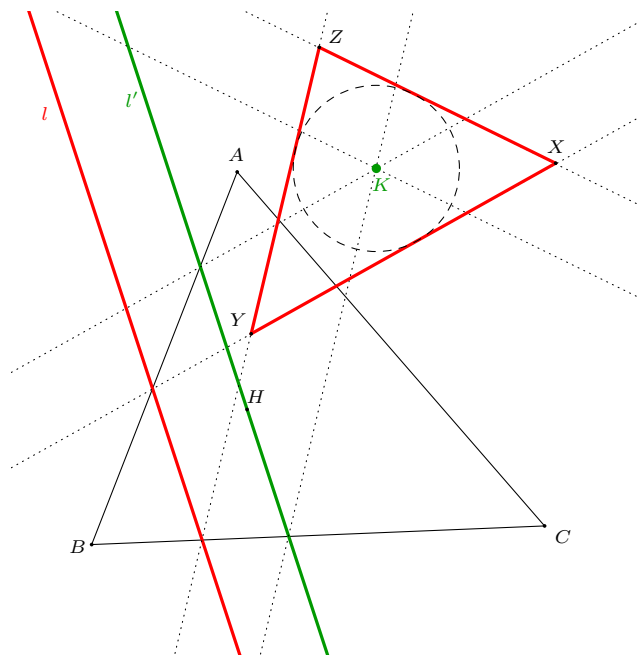
Cegielka 3'. – Niezdegenerowane piasty trójkątne

Jeśli piasta trójkątna XYZ pochodzi od prostej ℓ nieprzechodzącej przez ortocentrum H trójkąta ABC , to trójkąt XYZ jest niezdegenerowany.

Dowód. Rozważmy prostą ℓ' równoległą do ℓ i przechodzącą przez punkt H .

Ta prosta generuje piastę trójkątną zdegenerowaną do pewnego punktu K .

Na mocy Cegielki 2. punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt XYZ , a promień tego okręgu jest równy odległości między prostymi ℓ' i ℓ . \square



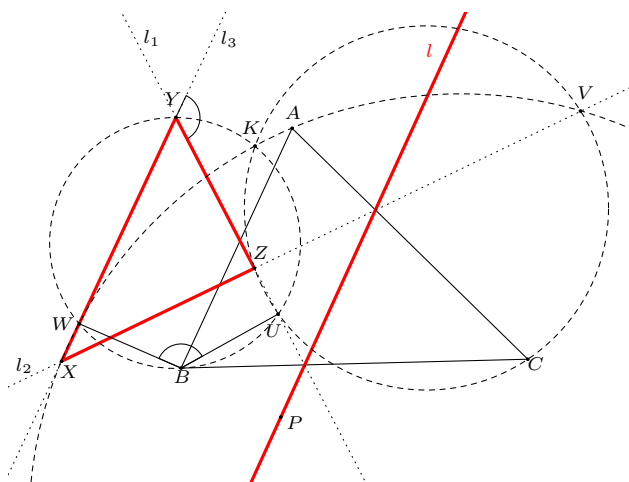
Cegielka 4. – Punkt centralny wiatraka K

Od tego momentu będziemy zakładali, że $P \neq H$ jest ustalonym punktem, a nasz wiatrak generowany jest przez prostą ℓ przechodzącą przez P . Jest jasne, że prosta z Cegielki 3. przechodząca przez ortocentrum trójkąta ABC jest prostą Steinera punktu K . Idąc tym tropem, dla dalszych rozważań zdefiniujemy punkt K jako punkt odpowiadający prostej Steinera PH . Punkt K będziemy nazywali punktem centralnym wiatraka, gdyż, jak się niebawem przekonamy, to tu spotkają się ważne elementy jego konstrukcji.

Cegielka 5. – Okręgi-wsporniki wiatraka

Oznaczmy przez U, V, W obrazy symetryczne punktu P odpowiednio względem boków BC, CA, AB trójkąta ABC . Wykażemy, że wierzchołki X, Y, Z piasty trójkątnej wiatraka leżą na okręgach opisanych odpowiednio na trójkątach AVW, BUW i CUV . Okręgi te będziemy nazywać wspornikami piasty trójkątnej wiatraka. Ponadto udowodnimy, że wszystkie trzy okręgi przecinają się w punkcie centralnym K .

Dowód. Punkt W można uzyskać z punktu U poprzez symetrię najpierw względem odcinka BC , a następnie AB , co jest równoważne obrotowi wokół punktu B o kąt $2\angle(BC, AB)$. Stąd otrzymujemy $\angle(BU, BW) = 2\angle(BC, AB)$. Ale na mocy Cegielki 1. $\angle(YU, YW) = \angle(\ell_1, \ell_3) = 2\angle(BC, AB)$, a więc na czworokącie $WBUY$ można opisać okrąg. Analogiczne rozumowanie doprowadzi nas do tego samego wniosku dla czworokątów $VAWX$ i $UCVZ$. Jak wiemy, dla prostej ℓ przechodzącej przez punkt H mamy $X = Y = Z = K$, a więc okręgi opisane na trójkątach AVW, BUW i CUV przecinają się w punkcie K . \square



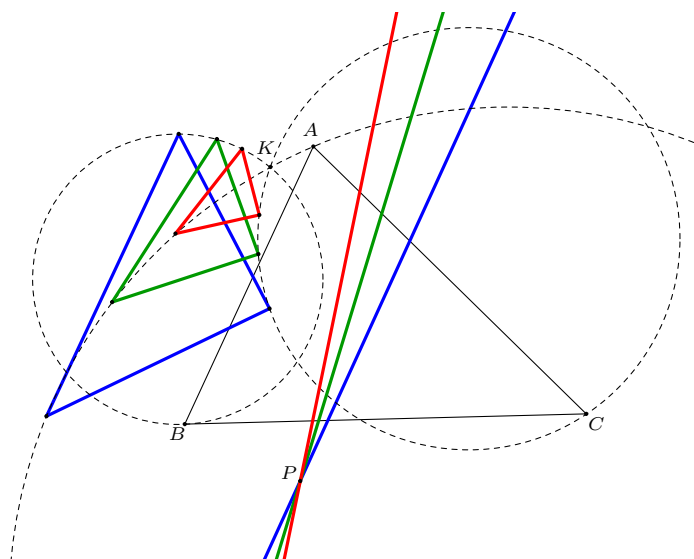
Podsumowanie konstrukcji wiatraka

Punkty U, V, W i K zależą tylko od P dla ustalonego trójkąta ABC . Zatem w miarę jak prosta ℓ obraca się wokół punktu P , wierzchołki X, Y, Z piasty trójkątnej poruszają się po okręgach opisanych odpowiednio na czworokątach $AKWV, BUKW, CVKU$. Nietrudno zauważyć, że każdy z wierzchołków zatacza pełny cykl na swoim okręgu-wsporniku za każdym razem, gdy prosta ℓ obróci się o 180° . Wierzchołki X, Y, Z spotykają się w punkcie K , aby utworzyć zdegenerowaną piastę, kiedy prosta ℓ przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC .

Cegielka 6. – Pewien szczególny wiatrak

Na koniec przyjrzymy się wiatrakowi, który powstanie, gdy punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Zakładając, że prosta ℓ przechodząca przez punkt P nie przechodzi przez ortocentrum H , pokażemy, że okrąg opisany na piaste trójkątnej XYZ przechodzi przez punkt centralny wiatraka K . Jest to jeszcze jeden przykład sytuacji, w której punkt K odgrywa szczególną rolę.



Dowód. Wystarczy wykazać, że $\angle(YK, KZ) = \angle(YX, XZ)$. Na czworokątach $WUKY$ i $VKUZ$ można opisać okręgi, więc

$$\angle(YK, KU) = \angle(YW, WU) \text{ oraz } \angle(KU, KZ) = \angle(VU, VZ).$$

Ponieważ punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC , to punkty U, V, W leżą na odpowiedniej prostej Steinerja, a zatem

$$\angle(YW, WU) = \angle(YW, WV) \text{ oraz } \angle(VU, VZ) = \angle(WV, VZ).$$

Z połączenia powyższych wynika

$$\begin{aligned} \angle(YK, KZ) &= \angle(YK, KU) + \angle(KU, KZ) = \angle(YW, WU) + \angle(VU, VZ) = \\ &= \angle(YW, WV) + \angle(WV, VZ) = \angle(XY, WV) + \angle(WV, XZ). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, w trójkącie XVW mamy następujące zależności

$$\angle(YX, XZ) = \angle(WX, XV) = \angle(WX, WV) + \angle(WV, XV) = \angle(XY, WV) + \angle(WV, XZ).$$

Stąd $\angle(YK, KZ) = \angle(YX, XZ)$, co kończy dowód. □

Deser

Wypada zdradzić, że inspiracją do rozważań nad psychodelicznymi wiatrakami było jedno z zadań zawodów Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, które odbyły się w 2011 roku w Amsterdamie. Pokażemy teraz, jak użyć wiatraka do zmielenia tego zadania.

Zadanie 6, LII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Okrąg Γ jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC . Niech ℓ będzie prostą styczną do okręgu Γ . Proste ℓ_a, ℓ_b oraz ℓ_c są symetryczne do prostej ℓ względem, odpowiednio, prostych BC, CA oraz AB . Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie wyznaczonym przez proste ℓ_a, ℓ_b oraz ℓ_c jest styczny do okręgu Γ .

Z perspektywy wiatraka... naszym zadaniem jest wykazać, że jeśli wiatrak jest wygenerowany przez prostą styczną do okręgu Γ opisanego na trójkącie ABC , to okrąg opisany na piąście trójkątnej XYZ jest styczny do okręgu Γ .

Dowód. Załóżmy, że prosta ℓ jest „bliska” stycznej do okręgu Γ , tzn. przecina ten okrąg w dwóch „sąsiednich” punktach P i Q . Z Cegielki 6. wiemy, że okrąg opisany na piąście trójkątnej XYZ pochodzącej od prostej ℓ przecina okrąg Γ w pewnych punktach K i L , którym odpowiadają proste Steinerja PH i QH . Im bliższa stycznej do okręgu Γ jest prosta ℓ , tym bliższe są punkty P i Q . Wreszcie dla ℓ stycznej $P = Q$, zatem pokryją się też proste PH i QH , a w konsekwencji również punkty K i L . A zatem okrąg opisany na trójkącie XYZ będzie styczny w punkcie K do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Tym samym dobiega końca zarówno nasz dowód, jak i nasza przygoda z wiatrakami. □

