O różnych spojrzeniach

spostrzeżenia ogólne i konkretny przykład

Marek KORDOS, Warszawa*

Od dawna jestem przekonany i głoszę to jako prawdę absolutną, że blisko 90% czasu i energii matematyka zajmują próby zrozumienia tego, co zrobili jego poprzednicy.

Tym, którzy nie wierzą, przytaczam różnicę, jaka jest między początkami rachunku różniczkowego (prędkość chwilowa Galileusza, *o* Newtona, monady Leibniza, różne zera Eulera itd.) a dzisiejszym stanem rzeczy, gdy można pochodnych nauczać młodzież szkolną. Albo między probabilistycznymi rozważaniami Pascala, Kartezjusza, Bernoulliego, czy już dwudziestowiecznym przekonaniem Hilberta, że losowość jest zjawiskiem fizycznym, a dzisiejszym sprawnym posługiwaniem się miarą unormowaną. Każdy zresztą może przytoczyć wiele przykładów, w których dzięki takim próbom zrozumienia poprzedników pierwotne intuicje i ich przypadkowe formalizacje zamieniły się w proste, przejrzyste, łatwe w użyciu pojęcia.

Czasem taki proces przemiany z poczwarki w motyla trwa długo, często ponad tysiąc lat.

Ale zacznijmy od końca.

Jak Helmholtz wykluczył matematykę z grona nauk przyrodniczych

Matematyka „od zawsze” była nauką przyrodniczą. Ba, mało – pitegorejczycy widzieli w niej najgłębszą prawdę o Naturze.

Immanuel Kant

Później, gdy matematyki robiło się coraz więcej, pojawiły się podejrzenia, że jednak wiele z niej zostało stworzone przez człowieka (który nawet dziś przez wielu nie jest uznany za coś naturalnego). Problem, co w naszym postrzeganiu świata jest dziełem Natury, a co sami sobie produkujemy, został frontalnie podjęty przez Immanuela Kanta (1724–1804) w dziele *Kritik der reinen Vernunft* (1781), które po polsku nazywa się *Krytyką czystego rozumu.* W dość naturalny sposób Kant z powszechności, z podobieństwa matematycznych intuicji wyprowadził wniosek, iż podstawa matematycznego myślenia jest nam dana od natury tak, jak np. fakt dwunożności.

Bernhard Riemann

Dobre polskie tłumaczenie wykładu Riemanna można znaleźć w numerze 4 *Matematyki–Społeczeństwa–Nauczania*; autorem jest Jacek Dembek

http://www.msn.uph.edu.plśmp/msn/4/23-30.pdf

Dziwnym trafem wypowiedź Kanta zbiegła się w czasie z upowszechnieniem przekonania, że istnieją różne możliwe opisy przestrzeni, a to z powodu, iż jeden z postulatów Euklidesa ma na tyle inny charakter, że można uprawiać skutecznie geometrię z jego zaprzeczeniem. Gdyby jednak Kant miał rację, taka możliwość nie istniałaby. Tych, którzy uparli się przy istnieniu alternatywnej geometrii, spotkały (jak wielu sądziło – zasłużone) nieszczęścia – Nikołaj Łobaczewski został zdegradowany ze stanowiska rektora uniwersytetu w Kazaniu, a nawet pozbawiony odznaczeń i profesury; Janos Bolyai dokonał życia w odosobnieniu i skrajnej depresji. Za sprawą Gaussa zreferowanie kwestii istnienia alternatywnych opisów przestrzeni zlecono nie-geometrze – bo ktoś z zewnątrz będzie bardziej obiektywny – Bernhardowi Riemannowi (1826–1866) pod pretekstem podsunięcia mu tematu wykładu habilitacyjnego. Tak powstał w 1854 roku artykuł *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, co tłumaczymy jako *O hipotezach leżących u podstaw geometrii.* Rada naukowa uniwersytetu w Getyndze (złożona z profesorów wszelkich nauk) oceniła wykład bardzo wysoko i uznała jego autora za godnego godności docenta. Po czym całą sprawę uznano jedynie za błyskotliwy fajerwerk inteligencji i o sprawie zapomniano, mimo iż wzięcie jej poważnie wskazywałoby na możliwość tworzenia przez matematyków wielu bardzo różnorodnych teorii geometrycznych.

I nie wiadomo, jak by się dalej potoczyły dzieje, gdyby nie przypadkowe przejrzenie tkwiącego nieprzydatnie od 14 lat w bibliotece tekstu wykładu

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, kordos@mimuw.edu.pl

Riemanna przez fizyka Hermanna Helmholtza (1821–1894). Zafascynowany możliwością tworzenia rozmaitych geometrii na potrzeby fizyki napisał artykuł o prowokacyjnym tytule *Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, czyli *O faktach leżących u podstaw geometrii*, gdzie podaje warunki, jakie musi spełniać geometria, aby można ją było zastosować w fizyce.

Hermann Helmholtz

Cóż, jak to mówią *chłop strzela, Pan Bóg kule nosi* – nawet fizycy odczytali z tego tekstu daleko ogólniejszą treść: skoro można tworzyć na potrzeby fizyki odpowiednio dobrane geometrie, to
• po pierwsze, można tworzyć różne teorie matematyczne na potrzeby dowolnego działu nauk przyrodniczych (a może i samej matematyki?);
• po drugie, w jednej dziedzinie fizyki (czy innej nauki) można stosować w rozstrzyganiu różnych zagadnień różne teorie matematyczne,
ergo matematyka jest skrzynką z narzędziami dla nauk przyrodniczych
(o społecznych wtedy jeszcze nie myślano).

Sama praca Helmholtza nie była zbyt precyzyjna. Z podanych przez niego warunków stosowalności geometrii w fizyce właściwie tylko jeden jest podany bez usterek: *pojęcie ciała sztywnego ma sens jedynie w przestrzeni o stałej krzywiźnie*. Jednak uogólniająca interpretacja, jakiej powszechnie dokonano, czyniła z niej rzecz tak cenną, że z sympatią wskazywano do niej poprawki i udoskonalenia – jako przykład może służyć tekst Sophusa Lie (1842–1899) *Bemerkungen zu v. Helmholtz'Arbeit*
„Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen” (1886).

Możliwość stwarzania sobie matematyki zgodnie z potrzebami nauk przyrodniczych wykluczała przyrodniczość samej matematyki. Dało to asumpt do stworzenia dyscypliny poszukującej korzeni, z których te wszystkie matematyki wyrastają, czyli teorii zwanej *podstawy matematyki*.

Z wielością matematyk trudno się zresztą pogodzić. Dopiero prace Paula Cohena i stworzona przez niego metoda – *forcing* – produkowania nawet alternatywnych teorii mnogości przekonała matematyków, że z wielością pogodzić się trzeba.

Rzeczywistość i jej modele

Już Klaudiusz Ptolemeusz w swoim dziele powszechnie noszącym dziś arabski tytuł *Almagest*, czyli w *Wielkiej astronomii* w księdze 13 pisze, że podany przez niego model ruchów planet, złożony z obracających się okręgów (*dyferentów*), na których znajdują się środki obracających się okręgów (*epicykli I rzędu*), na których znajdują się środki obracających się okręgów (*epicykli II rzędu*) itd., aż w końcu znajdują się na nich planety – łącznie użył 77 okręgów – nie jest odbiciem żadnej realności. Żadnych z tych okręgów nie ma – to tylko model matematyczny, pozwalający przewidywać, a nie przedstawiać! zjawiska.

Podobnie pisał Kopernik o swoim systemie planetarnym. Podobnie pisał Kepler.

Morału z tego nie chciano jednak przez setki lat konsekwentnie wyciągać. Do dziś pisze się o dualizmie korpuskularno-falowym światła, podczas gdy żadnego dualizmu nie ma, tylko pewne zjawiska wywoływane przez światło lepiej modeluje model korpuskularny, a pewne inne – model falowy. Podobnie do opisu mierzalnych zjawisk związanych z opornością elektryczną bez zastrzeżeń używa się liczb zespolonych, choć wszelkie wyniki pomiarów są rzeczywiste.

Problem należytego odróżniania modeli od modelowanych przez nie zjawisk został przez Helmholtza postawiony jasno. I niby wszyscy zrozumieli (tak jak zrozumiał to 1700 lat wcześniej Ptolemeusz). Ale jako wieloletni redaktor *Delty* muszę wyznać, że nie wszyscy autorzy radzą sobie z tą sprawą.

To może lepiej wróćmy do matematyki.

Jedność wielości

Każdy wie, że elipsa to zbiór punktów, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów jest stała. Ale też jest to wynik przecięcia stożka obrotowego płaszczyzną nieprzechodzącą przez jego wierzchołek, która przecina oś stożka pod większym kątem niż tworząca. Bo jest to również zbiór punktów samosprzężonych w korelacji biegunowej. I zbiór punktów, których odległość od pewnego punktu jest w stałej proporcji do odległości od ustalonej prostej. Oczywiście, każdy wie, że jest to jedno z rozwiązań zagadnienia dwóch ciał (dowodem istnienia tego rozwiązania jesteśmy my sami). Nie należy zapomnieć, że to obraz okręgu w przekształceniu afinicznym. We współrzędnych biegunowych elipsa to krzywa o równaniu $r = \frac{A}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$. Itd. itp.

Felix Klein

O faktycznej treści programu Kleina dowiedziałem się w setną rocznicę wygłoszenia przez niego wykładu inauguracyjnego, a to za sprawą kolegów niemieckich, którzy z okazji jubileuszu rozesłali fotokopię wymienionej broszury.

Znam takich, którzy twierdzą, że jedno z tych określeń to definicja elipsy (czyli elipsa *prawdziwa*), a pozostałe to tylko jej zastosowania. Ba, mało – są nawet tacy, którzy staczaliby walki w obronie swojej „wybranej". Podobnie, jak filozofowie do tej pory nie pogodzili się z „pierwiastkiem z minus jeden".

To byłoby jeszcze do zniesienia – gorzej, gdy chodzi o teorie: taka np. geometria rzutowa funkcjonowała z jednej strony jako idealizacja optycznej perspektywy zbieżnej, używanej przez malarzy-realistów, a z drugiej strony jako teoria środków ciężkości układów punktów materialnych.

Problematyka ta znalazła swoje rozwiązanie w koncepcji Felixa Kleina (1849–1925) przedstawionej w wykładzie inaugurującym jego pracę na stanowisku profesora w Erlangen, rozwiniętym potem w obszernej broszurze *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (1872) znanej powszechnie jako *program erlangeński* i przedstawianej w bardzo (bardzo, bardzo) okrojonej postaci. Klein proponuje, aby za podstawowe narzędzie identyfikacji obiektów/struktur matematycznych uznać badanie ich grup automorfizmów: obiekty są matematycznie identyczne, gdy grupy te są jednakowe (tradycyjnie niealgebraicy mówią: są izomorficzne). Pojęcie to znacznie uogólnia pojęcie izomorfizmu, gdyż o nim można mówić jedynie w przypadku, gdy porównywane obiekty są sformalizowane w analogiczny sposób, podczas gdy podejście kleinowskie wcale tego nie wymaga.

Program Kleina stał się podstawą reformy matematyki, jaką skutecznie narzucili światu bourbakiści począwszy od lat trzydziestych XX wieku. Ale to odrębny temat.

Klein zaproponował więc, by wielopostaciowość (w szczególności różne formalizacje) obiektów matematycznych traktować jak ich odbicia w gabinecie krzywych luster, jakimi są opisujące je na różne sposoby różne teorie matematyczne. Matematyk zaś, widząc te odbicia, wytwarza w sobie (dla siebie?) prawdziwy, idealny obraz tego obiektu. Słowem jest to w czystej formie platońska wizja idei.

Wielość jedności

Na propozycję Kleina można spojrzeć również w duchu Helmholtza i skoncentrować się nie na utożsamianiu różnie wyglądających unaocznień tego samego obiektu, tej samej struktury czy teorii, lecz wręcz przeciwnie – specjalnie tworzyć jak najwięcej postaci badanego przez nas obiektu, gdyż w każdej z tych postaci zobaczyć można wyraźniej inne jego cechy. I tak, bardzo pouczające jest ujrzenie różnych twarzy geometrii rzutowej (o czym będzie najprawdopodobniej mowa na towarzyszącej temu zeszytowi LVI Szkole Matematyki Poglądowej), czy obejrzenie kolekcji różnie uzyskanych modeli geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego (co też kiedyś na Szkole przedstawić warto). I wiele, wiele innych obiektów, które oglądane z różnych stron zachwycają nas innymi szczegółami swojej urody.

Tutaj chcę przytoczyć bardzo prosty przykład i niewiele sfałszowaną historię mojego „zwiedzania" jego różnych wcieleń.

Obiektem tym są inwolucje, czyli przekształcenia, które wykonane dwukrotnie stają się identycznością. Z tego rodzaju przekształceniami mamy do czynienia właściwie w każdym zakątku matematyki, dlatego nie wątpię, że do przytoczonych przeze mnie sposobów ich obejrzenia każdy z czytających te słowa będzie potrafił dorzucić kolejne własne.

Spojrzenie elementarnie algebraiczne

Jak wiadomo, wszystkie algebraiczne funkcje odwrotne same do siebie (czyli inwolucje) to $-x$, $\frac{1}{x}$ *i* $\frac{-1}{x}$, powie niejeden.

Ale czy na pewno? zaniepokoi się wielu.

Ja, zetknąwszy się z tym pytaniem i, nie czując się pewnie w algebrze, zamiast się douczyć, zapytałem.

Andrzej Nowicki (Toruń) wiedział: to dwie szerokie klasy

$$\frac{c}{x} \text{ dla } c \neq 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{x+a}{bx-1} \text{ dla } ab+1 \neq 0.$$

Jak się to wie i jest się nauczycielem, ma się świetną okazję do urządzenia w klasie quizu: *kto znajdzie więcej algebraicznych inwolucji?*

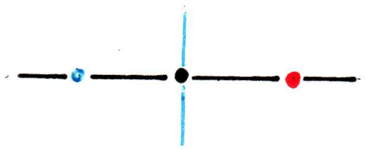
To ja $5-x$. *A ja* $\frac{x+1}{x-1}$. *Mam lepszą:* $\frac{x-\pi}{\sqrt[3]{7}x-1}$ itd.

W końcu uczniowie pewnie odkryją empirycznie te wzory i sprawdzą, że są dobre.

Ale pozostawało pytanie, dlaczego tak jest. Bo sprawdzenie, że to prawda, na pytanie *dlaczego?* nie odpowiada. I choć do dziś nie wiem, jak tę odpowiedź uzyskują algebraicy, gdy przetłumaczyłem problem na swój język, czyli geometrię, wszystko stało się (przynajmniej dla mnie) zrozumiałe.

Spojrzenie elementarnie geometryczne

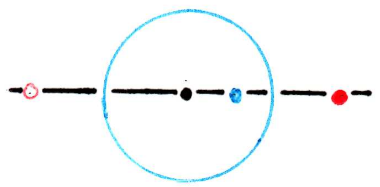
Przecież w geometrii funkcje odwrotne same do siebie to symetrie.



Liczby zaś tworzą (już w podstawówce) prostą, zwaną osią, gdy nada się jej orientację. A *symetrie na prostej to symetrie środkowe* – jak łatwo zauważyć, symetria względem p dana jest rachunkowym wzorem $2p-x$, bo środek punktów $2p-x$ i x, czyli ich średnia arytmetyczna, to p. Mieści się to wśród przytoczonych funkcji ($a=-2p$, $b=0$), ale ich, oczywiście, nie wyczerpuje.

Wypada spojrzeć szerzej: umieścić oś liczbową na płaszczyźnie. Na płaszczyźnie zachowują tę oś również symetrie względem prostopadłych do niej prostych.

Ale po co ta uwaga? – one nic nowego nie wnoszą: ograniczone do osi liczbowej są symetriami środkowymi.



Inwersja względem okręgu o środku S i promieniu r punktowi $X \neq S$ przyporządkowuje taki punkt X' na prostej SX, że $\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SX'} = r^2$, a antyinwersja taki punkt X'', że $\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SX''} = -r^2$.

Na płaszczyźnie są jednak i inne symetrie: inwersje, czyli symetrie względem okręgów (symetrie osiowe można uważać za ich szczególny przypadek) i antyinwersje – jeśli środek okręgu umieścimy na osi liczbowej, również one dostarczą nam poszukiwanych inwolucji. Sprawdźmy.

W przypadku osi dla inwersji o środku p i promieniu $r>0$ mamy $(x-p)\cdot(x'-p)=r^2$, czyli $x' = \frac{r^2}{x-p} + p = \frac{px+(r^2-p^2)}{x-p}$.

Gdy $p=0$, otrzymujemy wszystkie funkcje postaci $\frac{c}{x}$ dla $c>0$, gdy $p \neq 0$, dzielimy licznik i mianownik przez p, otrzymując wszystkie funkcje $\frac{x+a}{bx-1}$ dla $ab+1=(r^2/p^2)>0$.

Pozostałe funkcje uzyskujemy z antyinwersji.

Wystarczyło, że przetłumaczyłem sobie algebrę na geometrię i wszystko stało się dla mnie jasne!

Niestety, nie wszystko – zostało pytanie czy nie ma innych takich funkcji, a właściwie dlaczego nie ma?

Znowu nie wiedziałem, znów zapytałem, tym razem analityka.

Spojrzenie analityczne

Michał Krych od razu odpowiedział, przenosząc sprawę na grunt właściwego dla niego języka, czyli analizy matematycznej, a dokładniej: zespolonej. Bowiem każda funkcja wymierna, będąca inwolucją wśród liczb rzeczywistych, byłaby inwolucją również wśród liczb zespolonych.

A wśród liczb zespolonych funkcje wymierne o stopniu licznika m i stopniu mianownika n, dla $k = \max(m, n) > 1$ nie są różnowartościowe i „większość" wartości przyjmują k-krotnie, a zatem nie mają funkcji odwrotnych.

Jeśli bowiem $\dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} = w,$
to $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = w(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$,
co na ogół jest wielomianem stopnia k, a ten ma k pierwiastków.

Pozostają zatem tylko homografie, a wypada zauważyć, że sprawę homografii innych niż wymienione załatwić może już każdy gimnazjalista.

Homografie postaci $\dfrac{c}{x+p}$ są inwolucjami tylko dla $p = 0$
– jeśli $\dfrac{c}{\frac{c}{x+p} + p} = x$, to $c(x+p) = x(c + p(x+p))$, czyli $p(x^2 + px - c) = 0$,
a to jest tożsamością tylko dla $p = 0$.

Podobnie $\dfrac{x+a}{bx+q}$ jest inwolucją tylko dla $q = -1$:
$\dfrac{\frac{x+a}{bx+q} + a}{b\frac{x+a}{bx+q} + q} = x$ daje $x + a + a(bx+q) = x(b(x+a) + q(bx+q))$,
a to z kolei $b(1+q)x^2 + (q^2 - 1)x - a(q+1) = 0$.

Spojrzenie poprzez algebrę liniową

Powyższe sprawdzenie sugeruje, że coś tam na temat tego, jak to traktują algebraicy, można wynieść z algebry liniowej z pierwszego roku studiów matematycznych. Można było bowiem zauważyć, że składanie homografii odbywa się dokładnie tak, jak mnożenie macierzy:

składając $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ z $\dfrac{px+q}{rx+s}$, otrzymujemy $\dfrac{a \cdot \frac{px+q}{rx+s} + b}{c \cdot \frac{px+q}{rx+s} + d} = \dfrac{a(px+q) + b(rx+s)}{c(px+q) + d(rx+s)} =$
$= \dfrac{apx + aq + brx + bs}{cpx + cq + drx + dc} = \dfrac{(ap+br)x + (aq+bs)}{(cp+dr)x + (cq+ds)}$, a przecież

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$$

Oczywiście, mnożenie macierzy przez x daje zupełnie inny wynik niż ten, o który nam chodzi – macierze trzeba mnożyć przez macierze, w szczególności przez macierze 1×2, czyli wektory.

Spojrzenie przez geometrię rzutową

Ale istnieje przecież sposób widzenia punktów prostej tak, by miały dwie współrzędne – mianowicie operowanie ich współrzędnymi rzutowymi. Daje to w odniesieniu do homografii jeszcze jedną korzyść: nie trzeba uważać, by w mianowniku nie pojawiło się zero.

Przejście do współrzędnych rzutowych dokonuje się w ten sposób, że punkt mający współrzędną x ma teraz współrzędne $[x,\ 1]_\sim$, czyli $(x,\ 1)$ z dokładnością do proporcjonalności.

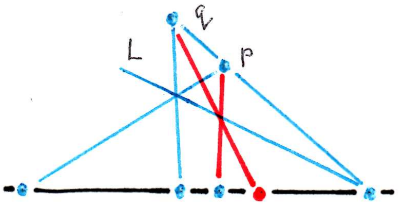
No i dodaje się do prostej jeszcze jeden punkt, zamykający ją na podobieństwo okręgu: punkt $[1,\ 0]_\sim$. W ten sposób wykorzystane są wszystkie pary z wyjątkiem $(0,\ 0)$, a homografia to mnożenie macierzy przez transponowany punkt:
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot [x,\ 1]^T = [ax+b,\ cx+d] = \left[\frac{ax+b}{cx+d},\ 1\right]$.

Wyszło paskudztwo, ale to dlatego, że przechodząc do geometrii rzutowej, nie wykorzystaliśmy jej narzędzi.

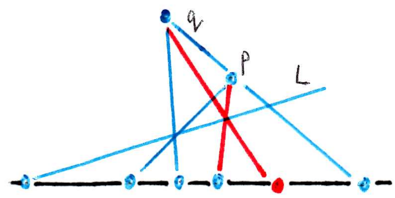
Na ćwiczeniach na pierwszym roku rozwiązuje się nawet równania $M^n = E$.

Pozostając w poetyce algebry liniowej, problem poszukiwania inwolucji można sformułować tak: znajdź macierz M, której kwadrat jest macierzą jednostkową.

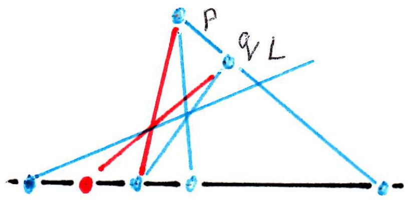
Geometrycznie można działanie wszystkich nieosobliwych macierzy na oś rzutową, czyli prostą obdarzoną współrzędnymi, zrealizować, składając następujące przekształcenia, które ze względu na rozmaity poziom zaprzyjaźnienia Czytelnika z metodami rzutowymi opiszemy za pomocą swojskich rzutów środkowych prostej na prostą.



$[0,\ 1]$ $[a,\ 1]$ $[b,\ 1]$ $[a+b,\ 1]$ $[1, 0]$



$[0,\ 1]$ $[1,\ 1]$ $[a,\ 1]$ $[b,\ 1]$ $[a\cdot b,\ 1]$ $[1, 0]$



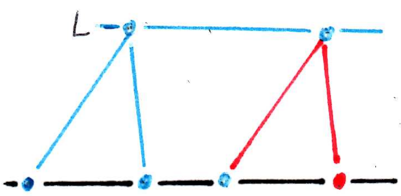
$[0,\ 1]$ $[a^{-1},\ 1]$ $[1,\ 1]$ $[a,\ 1]$ $[1, 0]$

Rysunki ręczne autora, taki już archaiczny dziwak.

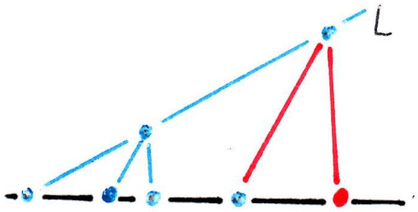
Na osi mamy ustalone punkty $[0,\ 1]$, $[1,\ 1]$ i $[1,\ 0]$. Do nich dobieramy dowolne punkty, nazwijmy ich współrzędne $[a,\ 1]$ i $[b,\ 1]$ (przypominam – współrzędne są dane z dokładnością do proporcjonalności). Jak widać, na pierwszym rysunku nie będzie nam potrzebny punkt $[1,\ 1]$, a na trzecim $[b,\ 1]$. Następnie rysujemy linie niebieskie, zaczynając od dowolnej z nich i swobodnie dobierając kolejne.
I dokonujemy rzutu środkowego o środku p z osi na prostą L, a potem rzutu środkowego o środku q z prostej L z powrotem na oś. W pierwszym przypadku punkt $[b,\ 1]$ przejdzie na punkt $[a+b,\ 1]$, w drugim na $[ab,\ 1]$,
a na trzecim rysunku punkt $[a,\ 1]$ przejdzie na punkt $[a^{-1},\ 1]$.

Zatem przekształcenia opisane rysunkami realizują odpowiednio działanie macierzy $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a z ich składania uzyska się wszystkie macierze nieosobliwe.

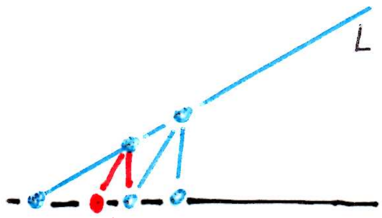
O tym, że nie ma tu żadnego cudu, przekonują nas rysunki, w których punkty p i q są kierunkami, a więc łącząca je prosta leży – jak mówią zakamieniali zwolennicy geometrii euklidesowej – „w nieskończoności”.



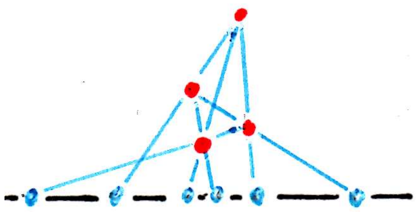
0 a b $a+b$



0 1 a b $a\cdot b$



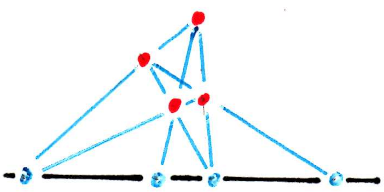
0 a^{-1} 1 a



$f(x)$ x z $f(y)$ y $f(z)$

Zysk z takiego podejścia ilustruje rysunek na marginesie: gdy f jest inwolucją, mamy $x,\ y,\ z,\ f(x),\ f(y),\ f(z)$ tworzą czworokątową szóstkę punktów, co oznacza, że punkty i ich obrazy leżą na przeciwległych (= zawierających wszystkie wierzchołki) bokach jakiegoś czworokąta.

W konsekwencji znając obrazy dwóch punktów, można obraz dowolnego innego znaleźć samą linijką.



$x = f(x)$ z $y = f(y)$ $f(z)$

Wynika z tego też, że gdy inwolucja ma dwa punkty stałe (jednego mieć nie może !), obrazy wszystkich pozostałych punktów tworzą z nimi czwórkę harmoniczną (kolejny rysunek), czyli taką, jaką z dwoma wierzchołkami trójkąta tworzą punkty przeciecia dwusiecznych kąta wewnętrznego i zewnętrznego przy przeciwległym wierzchołku z łączącą je prostą.

Na obrazku można też dostrzec połączenie twierdzeń Manelaosa i Cevy.

Tym kończę oglądanie w różnych zwierciadłach tego, co w elementarnej algebrze jest inwolucjami w $\mathbb{R}$.

Inwolucje w sosie własnym

Zacznijmy trywialnie:
Każda inwolucja jest bijekcją.
Istotnie, $f(x) = f(y) \to x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$, a każdy punkt x dziedziny jest obrazem $f(x)$, czyli dziedzina i przeciwdziedzina się pokrywają. $\diamond$

Przyda się jeszcze możliwość sklejania inwolucji:
Jeśli f_1 jest inwolucją na X_1, a f_2 – inwolucją na X_2 oraz $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, to

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \textit{gdy } x \in X_1; \\ f_2(x), & \textit{gdy } x \in X_2. \end{cases}$$

jest inwolucją na $X_1 \cup X_2$,
co chyba nie wymaga komentarzy.

Ale są też rzeczy nietrywialne:
Każda bijekcja jest złożeniem dwóch inwolucji.

Dowód tego twierdzenia przepisałem z artykułu Krzysztofa Prażmowskiego w *Delcie* 6/1977, bo jest on bardzo elegancki.

Niech więc f będzie bijekcją na X. Wprowadźmy dla dowolnej liczby całkowitej n oznaczenie $k^{(n)}$ określone przez warunki
$k^{(0)} = \mathrm{id},\ k^{(i+1)} = fk^{(i)},\ k^{(-i)} = (k^{(i)})^{-1}$.

Relacja *$a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie n, że $k^{(n)}(a) = b$,*
dzieli X na rozłączne klasy D_a.
Dla każdej z nich oddzielnie określimy inwolucje, których złożeniem jest f.

Potrzebne nam będzie tylko oczywiste spostrzeżenie, że $x \in D_a \to f(x) \in D_a$, a dokładniej $f(k^{(n)})(a) = k^{(n+1)}(a)$.

Mamy zastąpić dwiema inwolucjami funkcję f, która każdemu $k^{(n)}(a)$ przyporządkowuje $k^{(n+1)}(a)$. Te inwolucje to $g_a(k^{(n)}(a)) = k^{(-n)}(a)$ i $h_a(k^{(n)}(a)) = k^{(1-n)}(a)$.

Mamy bowiem
$h_a g_a(k^{(n)}(a)) = h_a(k^{(-n)}(a)) = k^{(1-(-n))}(a) = k^{(n+1)}(a) = f(k^{(n)})$.

Wypadałoby jeszcze sprawdzić, że g_a i h_a są inwolucjami. Ale to wynika z tego, że zarówno $-x$, jak $1 - x$ to inwolucje.$\diamond$

No i jeszcze jedno ogólne twierdzenie o inwolucjach.
Jeśli h_1 i h_2 są inwolucjami, to h_2h_1 jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy $h_2h_1 = h_1h_2$.

Istotnie, gdy h_2h_1 jest inwolucją, to
$h_2h_1h_2 = h_2h_1h_2(h_2h_1)(h_2h_1) = (h_2(h_1(h_2h_2)h_1)h_2)h_1 = h_1$,
a więc $h_1h_2 = (h_2h_1h_2)h_2 = h_2h_1(h_2h_2) = h_2h_1$.

Z kolei gdy $h_2h_1 = h_1h_2$, mamy
$(h_2h_1)(h_2h_1) = (h_2h_1)(h_1h_2) = (h_2(h_1h_1)h_2) = \mathrm{id}$. $\diamond$

I można tak dalej

Grupy, w których każdy element jest złożeniem dwóch inwolucji z tej grupy, to grupy biinwolutywne.

Takimi grupami obok bijekcji są np. izometrie $\mathbb{R}^n$. Dla $n = 2$ każda izometria jest złożeniem dwóch symetrii osiowych lub symetrii osiowej i środkowej;
dla $n = 3$ – dwóch symetrii osiowych lub osiowej i płaszczyznowej; itd.

O zastosowaniu biinwolutywności do sformalizowania klasycznej geometrii i wdrożeniu tego w niemieckich szkołach pisałem w *Delcie* 6/2013.

Daje to możliwość sformalizowania geometrii w języku inwolucji ... No właśnie, wypada przestać, więc na koniec ogólna uwaga.

Gdy przed półwiekiem broniłem doktoratu, profesor Andrzej Mostowski zapytał mnie, czemu opisałem geometrię eliptyczną jako teorię relacji dwuargumentowej, skoro można posłużyć się wzorami analitycznymi. Odpowiedziałem bezczelnie:
Każda ptaszyna swym własnym głosem Pana Boga chwali.

To prawda, ale mam nadzieję, że ten tekst będzie głosem na rzecz przekonania, że *dopiero pienia wszystkich ptasząt pozwalają w pełni kontemplować piękno tego świata*, również choćby w takiej jego drobnej części, jaką są inwolucje.