Sandra Bullock, chiński pojazd kosmiczny i matematyka*

*Marek KORDOS**, Warszawa*

Gravity, 2013, reżyser Alfonso Cuarón, siedem Oscarów.

Podobnie jak oscarowe jury, uważam film *Grawitacja* za wspaniałe dzieło, pokazujące, co człowiek wnosi swoją obecnością do martwego fizycznego świata. Ale tutaj chciałbym zwrócić uwagę na jeden z epizodów akcji tego filmu. Otóż Sandra Bullock (a właściwie genialnie zagrana przez nią kosmonautka, Ryan Stone) trafia do chińskiego pojazdu kosmicznego. Wraz z nią widz rzuca okiem na deskę rozdzielczą (czy w pojazdach kosmicznych też się to tak nazywa?) i widzi, że nie ma szans, aby zrozumieć opis poszczególnych jej wskaźników, przycisków i pokręteł. Beznadzieja zdaniem widza i naszej bohaterki, ale w tym momencie podejmuje ona odważną, a w tej sytuacji racjonalną decyzję, by posłużyć się tym pojazdem i jego urządzeniami tak, jakby był to taki pojazd (w tym przypadku amerykański lub rosyjski), do posługiwania się jakim została wyszkolona.
I podejmuje tę decyzję w głębokim przekonaniu, że konstruktorzy, inżynierowie każdego kraju myślą podobnie i znajdują podobne rozwiązania, stojąc przed analogicznymi problemami. Ufa w istnienie ogólnoludzkiej kultury technicznej.

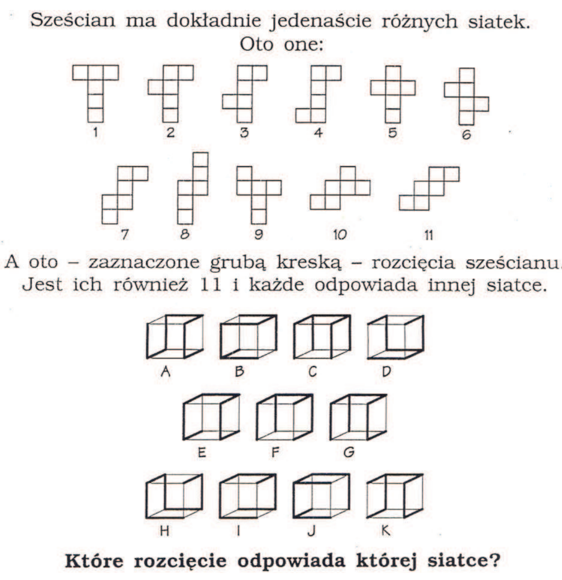
Znacznie bardziej zaawansowaną wiarę bohaterów w jedność cywilizacji (już niekoniecznie ludzkiej) można znaleźć w książce estońskiego pisarza Władimira Michajłowa *Pięciu na Deimosie*. Książka została w Polsce wznowiona w 2017 roku.

A czemu mi się to skojarzyło z matematyką? Myślę, że dla większości ludzi wszelkie wzory, równania, symbole, wykresy i rysunki geometryczne mają równie zrozumiały i oczywisty sens, jak dla Sandry Bullock opisy urzadzeń chińskiego pojazdu. Oczywiście, szkoła wymusza na nas przynajmniej wstępną znajomość i elementarne posługiwanie się matematyczną „chińszczyzną”, ale przeważnie kończy się na (sugerowanym przez Arystotelesa jako jedyną rolę matematyki) posługiwaniu się matematyką jako językiem opisu świata, a nie służy jego poznawaniu (jak chcieli pierwsi pitagorejczycy).

Symbolika matematyczna i pismo chińskie są analogiczne w tym sensie, że oba są ideograficzne, a więc mające widmo semantyczne (czyli znaczeniowe), a nie fonetyczne (dźwiekowe), jak np. wszelkie europejskie języki pisane. Pozwala to na skuteczne ich używanie przy różnym odczytywaniu dźwiękowym (np. $\sqrt{2}$ inaczej brzmi po polsku, rosyjsku, angielsku, a znaczy to samo).

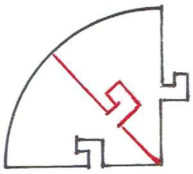
Jeśli zapytać o matematykę oderwaną od jej symboliki, od jej języka, to od połowy XVIII wieku jest ona rozumiana jako dająca pojęcie o przestrzeni, liczbach i nieskończoności (oraz o konstrukcjach z nich stworzonych). Jeśli pominąć zawartość nawiasu, można domniemać, że możliwe byłoby wyrobienie sobie takich pojęć bez konieczności odwoływania się do specyficznej matematycznej symboliki, nawet w wymiarze, w jakim jest ona wdrażana w nauczaniu początkowym czy w szkołach podstawowych. Chcąc zaagitować za taką możliwością, posłużę się przykładem z geometrii (będącej, wbrew nazwie, nauką o przestrzeni i zawartych w niej figurach), bo tak mi najwygodniej (gdyż jej dotyczyły moje matematyczne aktywności).

Oto dwa stare zadania, których rozwiązanie (przed obróceniem kartki) polecam nawet tym, którzy już je kiedyś widzieli.



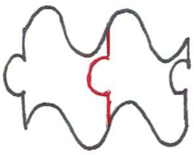
**marek.kordos40@gmail.com

*https://doi.org/10.34739/mp.2024.09.06

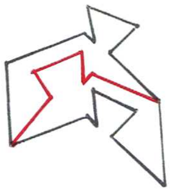


Zadania, a zwłaszcza to o podziale – wedle moich doświadczeń – okazują się trudne (niezależnie od wieku ani od wykształcenia).

W przypadku lewego z pierwszego rzędu (L1) zwrócenie uwagi na osobliwość występującą na poziomym i pionowym „odcinku” brzegu, a także na fakt, że inny fragment brzegu jest ćwiartką okręgu, nasuwa rozwiązanie: ten dziwny brzeg należy obrócić o 45°.

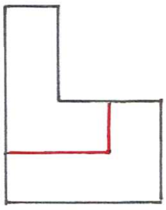


Podobne spostrzeżenie każe problem prawego z pierwszego rzędu (P1) rozwiązać, przesuwając „dziwny” brzeg o połowę dystansu dzielącego jego dwie wersje. Czyli mamy receptę: obracamy/przesuwamy o połowę tego, jak obrócił/przesunął autor zadania.

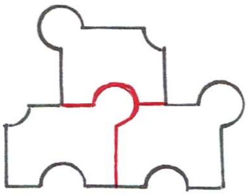


Ta znakomita metoda nie rozwiązuje jednak przypadku L2. Przesuwając „dziwny” fragment brzegu o połowę w pionie, wyjdziemy poza obszar figury, którą mamy podzielić. A mimo to rozwiązanie, jak widać obok, istnieje. Metoda jest właściwie podobna: też przesuwamy o połowę, ale równocześnie dokonujemy odbicia lustrzanego prawo-lewo.

Chciałoby się powiedzieć, używając już terminologii z tzw. prawdziwej matematyki, że autor zadań zademonstrował nam „po prostu” twierdzenie Chaslesa (czyt. szala) o klasyfikacji izometrii płaszczyzny, orzekające, iż każda taka izometria jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem (ewentualnie zerowym, co tutaj nie mogło mieć zastosowania – dlaczego?).



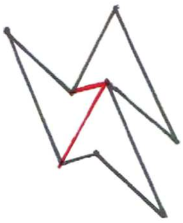
Jednak niezależnie od tego, czy autor tak zrobił, czy nie zrobił, nie widać, jak miałoby owo twierdzenie prowadzić do rozwiązania sytuacji P2. Oczywiście, jedna z części dzielonej figury powstaje z drugiej przez obrót, ale jak wpaść na pomysł, że to obrót i jak szukać środka tego obrotu? A może należy zwyczajnie zaprzyjaźnić się z płaszczyzną, zacząć samemu układać podobne zadania dla pognębienia kolegów (o ile dadzą się wciągnąć w taką zabawę)? Nieuchronne staje się domniemanie, że płaszczyzna ma dużo ciekawych własności niestanowiących przedmiotu zainteresowania matematycznych zawodowców czy olimpijczyków.



Pomysł, by zamienić nudne pokrycie płaszczyzny prostokątami na pokrycie jej „barankami” (L3) jest chyba tylko zabawą, ale już rozwiązanie P3 daje szereg spostrzeżeń zrozumiałych dla zawodowców i olimpijczyków, ale niekoniecznie im, bez tej zabawy, znanych. Otóż na stosownym obrazku widać:

- że odbijając którykolwiek z powstałych czworokątów względem środka któregokolwiek z jego boków, otrzymamy identyczny czworokąt sąsiedni,

a więc



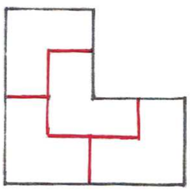
- że dowolnymi przystającymi czworokatami można szczelnie pokryć płaszczyznę,

albo też

- że środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok,

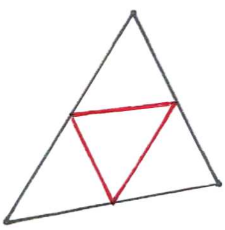
czyli mówiąc inaczej

- że złożenie (kolejne wykonanie) dowolnych trzech symetrii środkowych samo też jest (pojedynczą) symetrią środkową.



I to wszystko bez jakiejkolwiek matematycznej „chińszczyzny”.

Fakt, że rozwiązania dla L4 i P4 dają podziały na figury podobne (w skali 1:2) do figury dzielonej jest tak sztuczny, iż nasuwa pytanie, czy przedstawione tu rozwiązania wszystkich ośmiu sytuacji są jedyne: a może rozwiązań jest więcej? I tu dochodzimy do charakterystycznego obiektu „ prawdziwej” matematyki – dowodu.



Dowód to jest coś, co oddziela percepcję przestrzeni, liczb, nieskończoności od teorii opisujących te pojęcia. Nie jestem przekonany, czy jedynym (i czy właściwym) sposobem zapoznawania z tymi pojęciami jest nauczanie (tyle, ile się da) ich teorii. Czy nauczanie matematyki nie powinno bardziej przypominać nauczania geografii czy biologii? Przecież znaczna część matematyków na swoje pola badawcze patrzy tak, jak na swoistą przyrodę, którą eksplorują tak, jak kiedyś badano nieznane ogółowi części globu.

Rozpowszechniony jest pogląd, że nauczanie matematyki w tradycyjny (czyli stworzony i ustabilizowany w drugiej połowie XIX wieku) sposób kształtuje sprawność i dyscyplinę myślenia. Byłoby zbytnim ułatwieniem sobie wskazywanie znanych, niewątpliwie sprawnych intelektualnie osób, szczycących się nieskutecznością dokonywanej na nich edukacji matematycznej. Warto jednak przytoczyć obowiązujące jeszcze w moich czasach szkolnych (matura 1958) przekonanie, iż najlepszą szkołą myślenia jest nauka łaciny (to był jedyny „język obcy” nauczany w klasie, którą kończyłem w renomowanym warszawskim liceum). Dziś tak nikt nie myśli (albo, jeśli tak myśli, nie ma to wpływu na realną edukację) – może więc pora, by zakiełkowała myśl, by matematyki uczyć tak, jak naucza się nauk przyrodniczych.

Inny mój tekst agitujący za zmianą paradygmatu nauczania matematyki można znaleźć w artykule *Martin Gardner był wielkim matematykiem, choć matematykiem nie był*; *Delta* 1/2011, str. 1–5.

Można znaleźć, oznacza, że Redakcja *Delty* udostępnia skany dowolnego wskazanego artykułu ze swej ponad półwiecznej historii delta@mimuw.edu.pl

Oczywiście, trzeba po arystotelesowsku uczyć opisywania za pomocą pojęć matematycznych rzeczywistości przyrodniczej, technicznej, społecznej czy ekonomicznej. Trzeba uczyć odczytywania tak zapisywanych (wykresy, rysunki techniczne, zestawienia i nadużywane ostatnio prezentacje) informacji. Ale nie oznacza to nauczania zdyscyplinowanej dedukcji i sprawności w przeprowadzaniu formalnych dowodów. Przecież świat medycyny, historii, techniki, ekonomii itd. takimi dowodami się nie posługuje. Sztandarowym tu przykładem jest fakt rozwoju lotnictwa, przy niemożności (spełniającego kryteria matematycznej ścisłości i fizycznej poprawności) udowodnienia, że samoloty mogą latać. Ale i bez tak demagogicznych przykładów sprawa jest oczywista.

Co ciekawe, Arystoteles nie wiązał pojęcia dowodu z matematyką. Zajmując się problemem poprawności rozumowań stworzył *sylogizmy*, schematy rozumowań. Wyróżnił ich 256, połączonych w cztery grupy (po 64), w której każdej było tylko sześć schematów rozumowań poprawnych, co w sumie dawało 24 schematy poprawnego rozumowania (powtarzam: na 256 rozpatrywanych). To uważane jest za początki logiki, której związki z matematyką bywają bardzo urozmaicone.

My dzisiaj, posługując się przemądrzałym pojęciem zbioru pustego, umiemy sfalsyfikować jeszcze 5 arystotelesowskich sylogizmów.

Wróćmy jednak na ziemię, czyli do drugiego z zaproponowanych na wstępie zadań. Odpowiedź jest następująca:

A–4, B–11, C–5, D–9, E–1, F–6, G–2, H–8, I–7, J–10, K–3.

Ale jak do tego dojść?

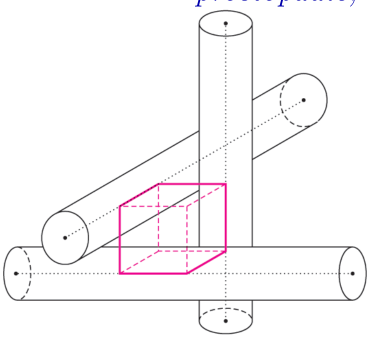
Wydaje się, że i tutaj najskuteczniejsze będzie użycie metody naturalnej w naukach przyrodniczych – należy posłużyć się doświadczeniem: wyciąć z kartonika odpowiednie siatki, a potem je pozaginać tak, by utworzyły sześcian. Rzecz jasna można zrobić to w wyobraźni (dziś u wielu zastępowanej przez tzw. rzeczywistość wirtualną). Ciekawe jest przyjrzenie się samym rozcięciom – jak każdy zauważy, rozcinamy 7 (na dwanaście) krawędzi. Nie każde jednak siedem rozciętych krawędzi da nam siatkę (niektóre np. podzielą ściany na dwie odzielne grupy) – czy można jakoś wyróżnić te dobre cięcia?

Tego rodzaju rozważania można zacząć od czegoś prostszego od sześcianu (choć mniej popularnego) – od czworościanu foremnego. Tu dla otrzymania siatki należy rozciąć odpowiednie trzy (na sześć) krawędzie. Każdy się łatwo przekonuje, że otrzymujemy dwie różne siatki – jak jednak z tego dojść do liczby 11 dla sześcianu? Czy ona ma jakiś sensowny związek z liczbą rozcięć, czyli 7? A idąc dalej: do uzyskania siatek ośmiościanu trzeba rozciąć też siedem krawędzi – czy to znaczy, że siatek ośmiościanu też jest 11? Dla dwunastościanu i dwudziestościanu potrzeba 9 rozcięć – czy to znaczy, że mają taką samą liczbę różnych siatek? Jak znajdować liczbę różnych siatek?

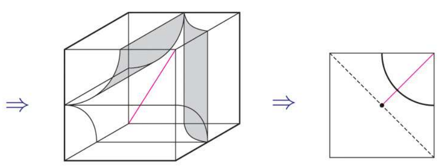
Dość szalone rozwinięcie tego tematu zamieściłem w artykule *Siatki, grafy, wielościany*; *Delta* 10/2011, str. 14–15.

Wyżej przedstawionym poglądom na temat tego, że trzeba uczyć postrzegania przestrzeni (liczb czy nieskończoności) minimalizując konieczność opanowywania matematycznej symboliki, swoistej „chińszczyzny”, można przeciwstawić obawę, że w ten sposób ta „lepsza” matematyka nam umknie. Zamiast obrony przed takim zarzutem proponuję oponentom rozwiązanie wspaniałego zadania twórcy najlepszych zbiorów zadań z geometrii, Igora Fiodorowicza Szarygina:

Jak szeroki walec można włożyć pomiędzy trzy jednakowe, prostopadłe, stykające się walce?



Jak widać, wystarczą trzy rzuty okiem i już wiemy, że jego promień, to różnica między przekątną i bokiem kwadratu o boku takim, jak promienie danych walców.



Nieprawdaż?